

Ciencias Básicas e Ingeniería

Vibraciones mecánicas en una y dos dimensiones; nuevos estudios experimentales

Tesis de Doctorado

en

Ciencias e Ingeniería de Materiales

presenta:

M. en C. Arturo Arreola Lucas

Asesor Interno:

Dr. Alvaro L. Salas Brito

Universidad Autónoma Metropolitana

Azcapotzalco

Asesor Externo:

Dr. Rafael A. Méndez Sánchez

Instituto de Ciencias Físicas

Universidad Nacional Autónoma de México

Índice

| | |
|---|-------------|
| Agradecimientos | iv |
| Resumen | vi |
| Abstract | vii |
| Acronimos | viii |
| 1 Introducción | 1 |
| 2 Desarrollo experimental | 5 |
| 2.1 Espectroscopia acústica resonante | 5 |
| 2.2 Montaje | 6 |
| 2.2.1 Detalles previos al montaje | 6 |
| 2.2.2 Instrumentos empleados en la ARS | 7 |
| 2.2.3 Transductores electromagnéticos-acústicos (EMATs). | 8 |
| 2.2.4 Arreglo instrumental | 9 |
| 2.3 Ondas mecánicas en barras rectangulares | 11 |
| 2.4 Vibraciones en sistemas elásticos bidimensionales | 12 |
| 2.5 Desarrollo experimental para el estudio de paquetes de onda en el dominio del tiempo | 13 |
| 2.5.1 Instrumentos | 14 |
| 2.5.2 Consideraciones experimentales | 15 |
| 3 Modos normales en el plano de una placa rectangular | 16 |
| 3.1 Espectro acústico resonante de la placa rectangular | 16 |
| 3.2 Ecuaciones que rigen las vibraciones en el plano | 16 |
| 3.3 Método de expansión en ondas planas | 17 |
| 3.4 Polarización de ondas en el plano | 18 |
| 3.5 Medición de las amplitudes de onda en el plano | 19 |
| 3.6 Modos normales | 21 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Vibraciones en el dominio del tiempo | 22 |
| 4.1 | Fundamento teórico | 23 |
| 4.2 | Dinámica de paquetes de ondas en barras estructuradas: simulación numérica | 26 |
| 4.3 | Montaje experimental para barras estructuradas | 27 |
| 4.4 | Resultados experimentales | 27 |
| 4.4.1 | Barra lisa | 27 |
| 4.4.2 | Barra estructurada periódica | 31 |
| 4.4.3 | Oscilaciones de Bloch en medios elásticos mecánicos | 34 |
| 4.4.4 | Atrapamiento de arcoíris mecánico | 36 |
| 5 | Transporte ondulatorio a través de billares caóticos con simetría de reflexión | 40 |
| 5.1 | Universalidad de las fluctuaciones de la transmisión | 40 |
| 5.2 | Modos de transmisión mecánica a través de guías de onda elásticas | 42 |
| 5.3 | Diseño y fabricación de dos cavidades caóticas elásticas con simetría espec- ular | 44 |
| 5.3.1 | Billar de Sinai | 44 |
| 5.3.2 | Estadio de Bunimovich | 44 |
| 5.4 | Procedimiento experimental | 46 |
| 5.4.1 | Cavidades elásticas (dimensiones y detalles) | 47 |
| 5.5 | Medio billar de Sinai | 49 |
| 5.5.1 | Transmisión para un modo abierto | 49 |
| 5.5.2 | Resultados configuración 1 | 49 |
| 5.5.3 | Histogramas de la transmisión elástica | 50 |
| 5.5.4 | Transmisión para dos modos abiertos | 60 |
| 5.5.5 | Resultados configuración 2 | 60 |
| 5.5.6 | Resultados configuración 4 | 61 |
| 5.5.7 | Resultados configuración 5 | 62 |
| 5.6 | Medio estadio de Bunimovich | 63 |
| 5.6.1 | Transmisión para un modo | 63 |
| 5.7 | Efecto de la absorción en el estudio del transporte elástico | 67 |
| 6 | Conclusiones | 69 |
| A | Caos una definición simple | 71 |
| A.1 | El caos | 71 |
| A.2 | Los billares dinámicos | 73 |
| B | Modos de transmisión para ondas fuera del plano | 75 |
| C | Transporte ondulatorio mecánico a través de cavidades caóticas elásticas | 77 |
| C.1 | Obtención general del modelo teórico del transporte ondulatorio en cavi- dades caóticas | 77 |

| | |
|---|-----------|
| C.2 La matriz S y su distribución estadística para sistemas con simetría de reflexión especular | 78 |
| D Productos | 80 |
| Bibliografía | 99 |

Dedicada a...

Rosa Maria Lucas Lugo

*Gracias a tí,
he llegado hasta aquí*

Gabriela Baéz y Rafael Méndez

Todo mi cariño y eterno agradecimiento

Estrella Llanin Gonzalez Cruz

Siempre estaré contigo

Agradecimientos

A todos aquellos que colaboraron en el desarrollo de mi formación para adquirir el grado de Doctor en Ciencia e Ingeniería de Materiales en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Azcapotzalco.

A mis buenos amigos que me apoyaron para la elaboración y conclusión de la misma. Con aportaciones nuevas, debates e incluso discusiones fuertes, entre ellos están; Zeus, Enrique y Filiberto.

Mi gratitud a los Doctores Alvaro Salas Brito y Rafael Méndez Sánchez por haber aceptado ser mis asesores a lo largo de todo el doctorado. Sus direcciones fueron de gran utilidad y sumamente necesarios.

Debo de reconocer al Dr. Moisés Martínez por sus invaluable consejos y direcciones propuestas en el desarrollo de los experimentos de transporte de ondas mecánicas, además de aceptar ser uno de mis sinodales, De igual manera agradezco mis sinodales ; el Dr. Juan Salvador Arellano y al Dr. Alvaro Salas Brito por sus consejos y modificaciones sugeridas, lo que enriqueció y mejoró notablemente esta tesis.

Toda mi gratitud, cariño, reconocimiento y gran parte de mi desarrollo profesional y personal son debidos a la Dra. Gabriela Báez y al Dr. Rafael Méndez debido a que no hubiera podido realizar esta empresa sin su apoyo incondicional.

A mis familiares, mi padre Arturo Arreola Duran y a mis Hermanos, Rosalinda, Marisol y Carlos. Muchas gracias por sus consejos pero sobre todo a la gran mujer que es mi madre Rosa María Lucas Lugo.

Quiero también dar las gracias a el Dr. Jose Sanchez Dehesa por haberme invitado, en dos ocasiones, a colaborar experimentalmente a la UPV. Con ello la oportunidad de conocer nuevos amigos y a las maravillosas personas de la hermosa ciudad de Valencia, a la cual espero pronto regresar.

Y a Estrella Llanin por ser mi gran apoyo a lo largo de esta gran empresa, sin sus animos en los momentos mas apremiantes no hubiera logrado mis metas, te lo agradezco amor.

Por último quiero dar las gracias al apoyo del CONACYT a través de una beca de Doctorado y al apoyo dado por los proyectos DGAPA PAPIIT-IN103115.

Resumen

En este trabajo se muestran los principales resultados obtenidos en tres experimentos sobre control de ondas mecánicas en sistemas elásticos, usando la técnica conocida como espectroscopia acústica resonante (ARS). En primer lugar, se presentan las amplitudes de onda de los modos normales de vibración en el plano medidas en una placa rectangular. Se miden las dos polarizaciones de los modos normales; el acuerdo con la teoría es excelente. En segundo lugar, se estudia la dinámica de un paquete de ondas cuando éste viaja a través de una estructura que emula un cristal con un campo eléctrico constante para lo cual se modificó el montaje experimental de ARS. En este caso se sustituyó el detector por un vibrómetro Doppler. Los resultados experimentales son espectaculares y muestran el surgimiento de dos fenómenos de las ondas mecánicas: las oscilaciones de Bloch y el atrapamiento de arcoíris. Por último, se realizó el estudio de las propiedades de transporte de vibraciones mecánicas fuera del plano a través de una cavidad caótica elástica con simetría izquierda-derecha. Los estudios realizados confirman el mismo comportamiento presentado por sistemas ondulatorios de distinta naturaleza, evidenciando un comportamiento universal del transporte ondulatorio a través de cavidades caóticas y un excelente acuerdo de las medidas con las predicciones teóricas.

Abstract

Mechanical vibrations in one and two dimensions; new experimental studies

In this work, the main results obtained in three experiments on mechanical wave control in elastic systems are shown, using the technique known as resonant acoustic spectroscopy (ARS). First, the wave amplitudes of the normal modes of in-plane vibration measured on a rectangular plate are presented. The two polarizations of the normal modes are measured; the agreement with the theory is excellent. Secondly, the dynamics of a wave packet is studied when it travels through a structure that emulates a crystal with a constant electric field. In this case the experimental setup of ARS was modified, replacing the detector with a Doppler vibrometer. The experimental results are spectacular and show the emergence of two phenomena of mechanical waves: the Bloch oscillations and the rainbow trapping. Finally, the study of the transport properties of mechanical vibrations out of the plane was carried out through an elastic chaotic cavity with left-right symmetry. The studies carried out confirm the same behavior presented by undulatory systems of different nature, evidencing a universal behavior of the wave transport through chaotic cavities and an excellent agreement of the measurements with the theoretical predictions.

Acrónimos

A continuación se muestra una lista de los acrónimos usados a lo largo de esta tesis. Las letras mayúsculas muestran el acrónimo, entre paréntesis se indica de donde fueron tomadas las siglas y finalmente una breve explicación.

- 1 \rightsquigarrow ARS (*Acoustic Resonance Spectroscopy*). La espectroscopia acústica resonante es una técnica experimental en la que se analiza la respuesta, o el espectro, de una señal enviada a través de un sistema a estudiar.
- 2 \rightsquigarrow LOMA (*Laboratorio de Ondas y Materiales*). Laboratorio experimental, ubicado en la UAM-A, donde se realizaron los experimentos aquí estudiados.
- 3 \rightsquigarrow ESPI (*Electronic Speckle Pattern Interferometry*). Ver referencias [17, 20, 21].
- 4 \rightsquigarrow EMAT (*Electromagnetic Acoustic Transducer*). Los transductores electromagnéticos acústicos son los dispositivos mediante los cuales se generan y detentan vibraciones en los distintos sistemas aquí estudiados.
- 5 \rightsquigarrow VNA (*Vector Network Analyzer*). El analizador de redes vectorial es un aparato que se encarga de generar, comparar y analizar la señal que entra y sale del dispositivo bajo estudio.
- 6 \rightsquigarrow GPIB (*General Purpose Interface Bus*). El Bus de Interfaz de Uso General es un estándar bus de datos digital de corto rango para conectar dispositivos de testeo y medición con dispositivos que los controlen como un ordenador.
- 7 \rightsquigarrow NI PXI (*National Instrumental PXI*). Dispositivo que aglomera software, hardware y diferentes tipos de buses para interconectar componentes periféricos.
- 8 \rightsquigarrow TM (*Transfer Matrix*). Método para resolver sistemas.
- 9 \rightsquigarrow BO (*Bloch Oscillations*). Oscilaciones de Bloch, el fenómeno se explica en el Capítulo 4.
- 10 \rightsquigarrow MRT (*Mechanical Rainbow Trapping*). Atrapamiento de arcoiris mecánico, el fenómeno se explica en el Capítulo 4.

Capítulo 1

Introducción

Las vibraciones mecánicas en sistemas elásticos se encuentran presentes en muchos fenómenos de la vida cotidiana. En algunos casos hay que suprimirlas por no ser deseables, como en máquinas o edificios, mientras que en otros se desea amplificarlas, como en el caso de los instrumentos musicales o en algunos juegos mecánicos. Por ello, el estudio de las vibraciones mecánicas es importante en la ciencia e ingeniería de los materiales y, por consecuencia, llevar a cabo un control adecuado. Las aplicaciones, en prácticamente todas las ramas de la ingeniería, son más que evidentes. Si bien los estudios teóricos de las vibraciones mecánicas son extensos, los resultados experimentales, son escasos.

Se han implementado y complementado muy recientemente y con bastante éxito en el Laboratorio de Ondas y Materiales (LOMA) de la UAM-A, la técnica experimental conocida como espectroscopia acústica resonante (ARS, de *acoustic resonance spectroscopy*) para medios elásticos, en el intervalo audible [1, 2]. Esto ha hecho posible el estudio y caracterización de materiales a partir de varillas y placas simples, así como también de sistemas estructurados. La caracterización de las propiedades mecánicas y la comprobación experimental de nuevas teorías son un ejemplo de los excelentes resultados que se han logrado en el LOMA-UAMA. Los experimentos en el dominio del tiempo y el transporte en cavidades caóticas son escasos, presentando una oportunidad de estudiarlos experimentalmente en este trabajo. El estudio más reciente sobre este campo, ha probado la universalidad de las fluctuaciones de la transmitancia mecánica correspondiente a un sistema sin simetría [3].

En esta tesis se presentan tres investigaciones experimentales sobre control de vibraciones mecánicas en sistemas que van de los simples a los complejos: (1) las vibraciones en el plano de los modos normales de una placa rectangular, (2) las oscilaciones de Bloch y el atrapamiento de arcoíris con ondas torsionales en barras estructuradas y (3) el transporte de ondas mecánicas fuera del plano a través de cavidades caóticas con simetría de reflexión.

Estos tres fenómenos elásticos fueron elegidos en razón de su importancia: por ejemplo: las vibraciones en el plano de placas elásticas tienen mucha utilidad en aplicaciones especializadas de ingeniería como ocurre en sistemas de almacenamiento de datos, en el intervalo de los kiloHertz, en el que vibraciones en el plano causan un problema al

seguir pistas estrechas de datos [4]. Estas vibraciones también son relevantes en el diseño de cascos de embarcaciones, ya que hay evidencia de que las vibraciones en el plano y el ruido de alta frecuencia en barcos están fuertemente relacionados [5]. Los modos en el plano también desempeñan un papel importante en la transmisión de las vibraciones de alta frecuencia a través de placas con estructura [6]. Además, los picos de resonancia en el plano pueden utilizarse para realizar pruebas no destructivas y la evaluación de las constantes elásticas de un material [15]. Finalmente, como las vibraciones en el plano aparecen a frecuencias más altas que las vibraciones transversales fuera del plano, los cálculos de elementos finitos son más difíciles para los primeros que para los segundos. Todos estos problemas han llevado a renovar el interés por las vibración en el plano de placas rectangulares que cubren varios órdenes de magnitud desde nanosistemas hasta macroestructuras. Es importante mencionar aparte que hay varias contribuciones teóricas y numéricas significativas recientes para el estudio de las vibraciones en el plano de placas [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Sin embargo, los resultados experimentales han sido, hasta hace poco, muy escasos [15, 16]. Las posibles razones de este hecho son: primero, las vibraciones en el plano aparecen a altas frecuencias y en segundo lugar, la medición de las vibraciones transversales es más fácil que la excitación y detección de los modos en el plano [16, 17, 18, 19]. Tal estado de las cosas comenzó a cambiar cuando la interferometría electrónica de patrones de moteado — ESPI u holografía de TV — hizo posible la medición de los modos en el plano [17, 20, 21]. Por lo tanto, existe la necesidad de investigar las vibraciones en el plano de las placas para consolidar la teoría clásica de las vibraciones en el plano, especialmente a altas frecuencias, para contrastar dicha teoría con los resultados experimentales. Los resultados de esta investigación contribuyen con la literatura sobre el tema de las vibraciones en el plano de placas, que se pueden encontrar en [22].

La motivación para el estudio de las oscilaciones de Bloch y el efecto de atrapamiento de arcoíris en ondas mecánicas, es el control de las ondas electromagnéticas, que se ha logrado construyendo estructuras artificiales denominadas metamateriales. Es natural pensar, por ello, en el desarrollo de los análogos en metamateriales acústicos y mecánicos, para de igual manera controlar el sonido y las vibraciones, respectivamente. Excelentes artículos de revisión [23, 24] están disponibles, informando de las sorprendentes propiedades de estos nuevos tipos de estructuras artificiales. Aunque se han descrito experimentalmente muchos fenómenos emocionantes y novedosos, como el efecto de atrapamiento de arcoíris y el análogo de las oscilaciones electrónicas de Bloch, para los metamateriales acústicos, la demostración experimental en sistemas elásticos todavía es inexistente. Las nuevas estructuras para el control de las ondas elásticas aun son propuestas teóricasya que las vibraciones suelen implicar una mezcla de polarizaciones, acopladas por ser ondas vectoriales, lo que implica dificultades para medirlas selectivamente. El efecto de atrapamiento del arco iris, es uno de los fenómenos más interesantes recientemente descubiertos en el campo de la óptica [25]. En este efecto, los paquetes de ondas se frenan poco a poco a diferentes profundidades espaciales, dentro de una estructura sintética que ha incorporado un metamaterial con índice de refracción negativo. Las profundidades espaciales alcanzadas dependen de la frecuencia central del paquete de ondas. Desde su descubrimiento en 2007, muchas apli-

caciones potenciales han sido reportadas como [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 40]. Por lo tanto, la luz puede ser atrapada o multiplexada usando este efecto [35, 36, 37, 38, 39]. Se ha informado de una demostración de su análogo acústico mediante el uso de metamateriales acústicos [41, 42] y cristales fonónicos [43]. Por otro lado, las oscilaciones electrónicas de Bloch se obtienen en los cristales atómicos cuando se aplica un campo eléctrico DC [55]. Este fenómeno cuántico se demostró a finales de los ochenta gracias al descubrimiento de las superredes semiconductoras [56]. Más adelante, el análogo de las oscilaciones de Bloch también se demostró en diferentes estructuras que soportan la propagación de otros tipos de ondas, como las estructuras dieléctricas, guías de ondas, los átomos ultrafríos, los cristales fonónicos [57, 58, 59], nanoalambres superconductores [60] y más recientemente en movimiento molecular [61]. Se espera que las oscilaciones de Bloch análogas ocurran en estructuras mecánicas. Hasta ahora, no hay demostración de este efecto para ninguna de las diferentes ondas mecánicas que pueden propagarse sobre ellas.

El tercer estudio que realizaremos está relacionado al efecto del caos y las simetrías en el transporte ondulatorio a través de cavidades caóticas. La teoría del caos inicio apenas hace 50 años y hoy en día se encuentra en extensa investigación. El estudio de dicha teoría inclusive ha hecho posible ya la producción de algunos aparatos electrodomésticos de uso diario, pero aún hay mucho trabajo por realizar para comprender en su totalidad este nuevo campo de investigación. Se cuenta ya con algunos estudios sobre la sensibilidad de las condiciones iniciales, trayectorias de atractores y repulsores, fenómenos donde aparecen estructuras fractales, entre otros. En el caso que nos concierne, la universalidad de las fluctuaciones de la transmisión, han sido parcialmente probada experimentalmente en puntos cuánticos y cavidades de microondas. Incluso, ha dado pie al desarrollo de nuevos modelos teóricos, que incorporan otros parámetros y que presentan otro tipo de universalidades. Esto ha hecho posible entender el surgimiento nuevos fenómenos como son la presencia de absorción, la transmisión directa y las orbitas periódicas, entre otros. Es por estas y algunas razones más que es necesario comprender el fenómeno en los campos de la elasticidad.

Como se ha mencionado a lo largo de la introducción, el objetivo principal del trabajo doctoral es estudiar experimentalmente fenómenos ondulatorios en estructuras elásticas mecánicas usando la ARS, cuyos resultados son vertidos en el presente escrito y que han sido organizados de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se describe con detenimiento la técnica experimental de la espectroscopia acústica resonante junto con los instrumentos empleados técnica. También se presentan detalles de montaje y algunas definiciones que serán de suma importancia a lo largo del la tesis. Para el Capítulo 3 se da el primer resultado obtenido, el cual es la medición de las dos polarizaciones de algunos modos de vibración *en el plano* de una placa rectangular. La publicación del correspondiente artículo [63], que sustenta la presente tesis, se da en el apéndice D. En el Capítulo 4 se presentan tres resultados, en el dominio del tiempo, para las vibraciones torsionales de tres barras con estructura al enviar un paquete gaussiano. En la primera se muestra el surgimiento de bandas de frecuencia prohibidas y permitidas. En la segunda se muestra la emergencia de las oscilaciones de Bloch y en la última se presenta la aparición del

fenómeno llamado atrapamiento de arcoíris para las mismas ondas torsionales. Estos resultados fueron obtenidos usando la ARS y pero el EMAT detector se remplazó por un vibrometro Doppler. En el capítulo 5 se exhibe el último resultado experimental para un sistema abierto, como lo es un billar elástico bidimensional. Este billar tiene la particularidad de que, además de ser caótico, posee simetría de reflexión también conocida como simetría izquierda-derecha (L-R *symmetry*). En el capítulo 6, se dan las conclusiones de esta tesis y algunas propuestas para la continuación de los experimentos en temas altamente relacionados. Finalmente en los Apéndices se describen, de forma breve, algunas conceptos relevantes para esta tesis.

Capítulo 2

Desarrollo experimental

2.1 Espectroscopia acústica resonante

Aunque existen diversas técnicas bien conocidas para caracterizar mecánicamente muestras de materiales, en esta investigación se opta por usar la espectroscopia acústica resonante, ARS por sus siglas en inglés, debido a que presenta grandes ventajas con respecto a otras técnicas experimentales. Son varias las que se pueden mencionar, pero destacan de entre ellas: la posibilidad de llevar a cabo estudios de materiales íntegros, es decir, no se requiere destruir o tomar una muestra individual. Y el hecho de controlar las frecuencias en las que se produce la señal, tanto en sus intervalos como en tiempo de ejecución.

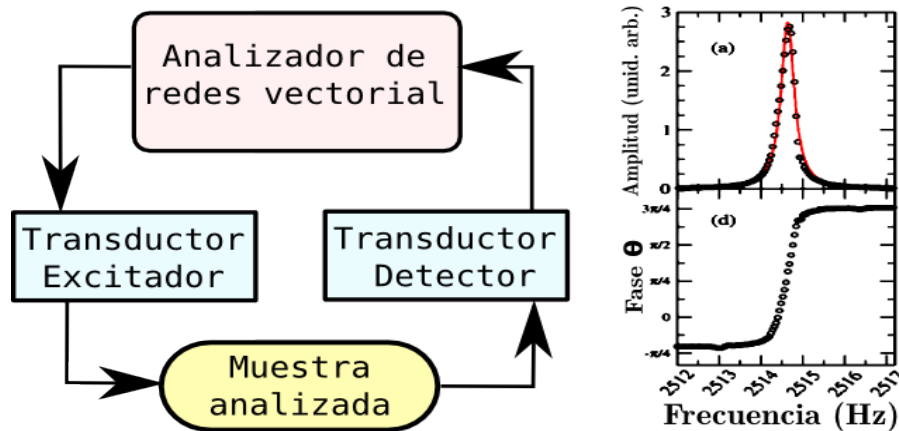


Figura 2.1: En la figura izquierda se observa un esquema simplificado de la espectroscopia acústica resonante (ARS). A derecha se muestran las gráficas típicas de las medidas. En la curva de la parte superior se ve la amplitud de la respuesta como función de la frecuencia; y abajo la fase en función de la frecuencia.

La ARS es una técnica experimental que, de manera muy general, consiste en producir vibraciones en una muestra y registrar la respuesta de ésta, para su análisis y caracterización posterior (Figura 2.1). Luego se compara con un patrón, espectro conocido o se contrasta con predicciones teóricas.

La técnica experimental de ARS, en resumen, consiste de tres etapas: la primera es la preparación controlada de la señal que generará la vibración, la cual se produce usando un generador de funciones u otro dispositivo, como un analizador vectorial de redes (VNA del inglés *vector network analyzer*). Esta señal armónica cambia cuasí-estáticamente su frecuencia hasta un máximo de aproximadamente 20 kHz, y se debe potenciar usando un amplificador de audio. La segunda etapa, es la interacción sin contacto de la señal con la muestra. Finalmente, en la tercera etapa, se obtiene un espectro inherente a la respuesta del sistema a la excitación a cada frecuencia del cual se extrae la información requerida.

2.2 Montaje

2.2.1 Detalles previos al montaje

Un punto importante a tratar es la forma de colocar el sistema. En los estudios que se van a realizar, se considera que los sistemas tienen fronteras libres. Por ello, lo ideal es tener suspendido el sistema sin contacto alguno. Debido a que en el laboratorio esto no es posible de realizar, el sistema se monta sobre una estructura que minimiza el contacto y hace posible mantener el peso de un máximo aproximado de 10 kilos. Tal estructura consta de soportes universales e hilos de nailon que son tensados, cruzados y sujetos a los soportes.

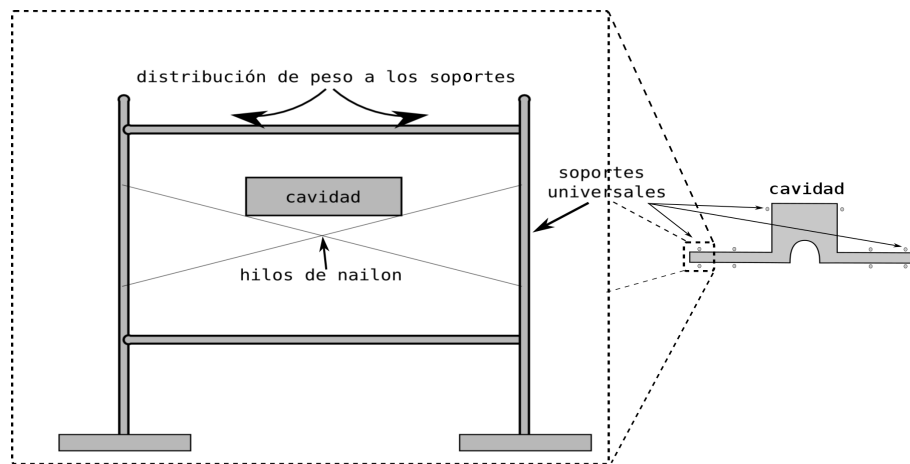


Figura 2.2: La figura principal muestra el detalle del montaje. Al fondo se observa el sitio donde se colocan los soportes universales. Como ejemplo de sistema bajo estudio se muestra una cavidad elástica.

La Figura 2.2 muestra el detalle del soporte. Este montaje minimiza la superficie que toca la placa ya que sólo existen puntos de contacto entre la placa y los hilos. Los soportes son similares a los empleados en la construcción donde se colocan traveses que distribuyen las cargas a las columnas y mantienen la forma de la estructura. Finalmente es importante recalcar que el sistema debe ser nivelado para evitar inclinaciones, lo que produce que se existan distintos tipos de ondas que no corresponden a las estudiadas debido a los acoplamientos elásticos.

2.2.2 Instrumentos empleados en la ARS

Los instrumentos empleados en el montaje experimental para la caracterización por ARS se listan a continuación;

1.-Analizador de redes vectorial, marca Anritsu, modelo MS4630B. Generalmente este tipo de instrumentos sirven para analizar las propiedades de las redes eléctricas, especialmente aquellas asociadas con la reflexión y la transmisión de señales, conocidas como parámetros de dispersión. La transmisión, para los sistemas usados de esta tesis, se mide usando un transductor que convierte la vibración mecánica (onda elástica particular), en una señal eléctrica y viceversa. En este instrumento se miden, entre otras cosas, la fase y la amplitud de la respuesta como función de la frecuencia, tiempos de retardo y propiedades de circuitos electrónicos (impedancia, inductancia, etc).



Figura 2.3: *Analizador vectorial de redes*

Para la ARS, el VNA es utilizado como un generador de funciones que produce una señal sinusoidal monocromática de frecuencia f que cuasiestáticamente cambia. También es utilizado para filtrar la señal de respuesta eliminando el ruido de fondo generado a diferentes frecuencias con respecto de la frecuencia original f , como lo hace un amplificador lock-in. Finalmente, es posible observar, en tiempo real, la respuesta de la muestra a cada frecuencia, como lo hace un osciloscopio. Los datos se transfieren a una computadora usando un puerto GPIB y el programa de automatización y adquisición de datos *phase* [62] en LabView.

2.-Amplificador de audio de alta fidelidad, marca Cerwin-Vega, modelo CV-900. Sistemas elásticos de aluminio, como los que son estudiados en los experimentos, disipan la energía del sistema con el medio muy rápido y las señales se hacen imperceptibles en los detectores. Se usa, entonces, un amplificador que trabaja en el rango audible ya que son fácilmente disponibles comercialmente y de costo bajo. Además han dado excelentes resultados en los experimentos [1, 2, 63].



Figura 2.4: *Amplificador de audio de alta fidelidad*

3.-Transductores electromagnéticos acústicos. Este tipo de transductores, denominados comúnmente como EMATs por sus siglas en inglés, consisten básicamente de dos elementos, una bobina de cobre y un imán, que se colocan en diferentes arreglos o configuraciones dependiendo del tipo de vibración que se desea generar de forma preferente o selectiva.

Las ventajas, de la ARS usando EMATs, con respecto a otros métodos para producir vibraciones mecánicas en sistemas elásticos, son: la excitación y detección son sin contacto entre el sistema y los transductores, lo que permite mejorar el control de la vibración, ya que se evita que los dispositivos EMATs actúen como fronteras que afecten los resultados experimentales. La caracterización de las propiedades mecánicas por ARS no destruye los sistemas. Estos transductores pueden ser usados indistintamente para medir o producir una vibración, es decir, son invertibles. Los EMATs tienen algunas desventajas por ejemplo: solo pueden estudiarse materiales paramagnéticos ya que los transductores operan a través de corrientes parásitas usando los campos magnéticos de las bobinas e imanes que los constituyen. Además hay interacción entre EMAT detector y excitador aún en ausencia de material. A continuación se profundiza sobre su funcionamiento.

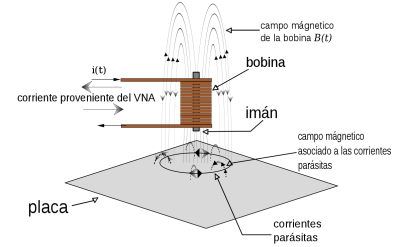


Figura 2.5: *Transductor Electromagnético Acústico (EMAT)*

2.2.3 Transductores electromagnéticos-acústicos (EMATs).

Recordemos brevemente los principios de funcionamiento de los EMAT; una explicación aun más detallada del funcionamiento de estos transductores se da en las referencias [1, 64].

El EMAT, como excitador o generador de vibraciones mecánicas sin contacto en la vecindad de un material paramagnético, opera de la siguiente manera:

1. Una corriente armónica, de frecuencia f , pasa a través de la bobina del EMAT; esto genera un campo magnético $B(t)$ que varía en el tiempo con misma frecuencia f .
2. Debido a la ley de inducción de Faraday, en cualquier circuito de un material paramagnético, que esté cerca de la bobina del EMAT, se generan corrientes parásitas locales; estas corrientes también son armónicas de frecuencia f .
3. Las corrientes parásitas, inducidas en el metal paramagnético, interactúan con el imán del EMAT a través de la fuerza de Lorentz.
4. El efecto de la fuerza de Lorentz sobre el metal se convertirá en una vibración mecánica que se propaga por el material.

Los EMAT son invertibles, *i.e.*, pueden detectar las vibraciones de un metal paramagnético. El transductor electromagnético-acústico, funcionando como detector, opera de esta manera:

1. Se producirá un cambio de flujo magnético en los bucles dentro de un metal paramagnético vibrante cuando el imán permanente de EMAT está cerca de él.
2. El cambio de flujo, por la ley de Faraday, producirá corrientes parásitas en el material; estas corrientes oscilan con la frecuencia f del metal vibrante.
3. Las corrientes parásitas son también variables en el tiempo. Toda corriente variable en el tiempo generará su propio campo magnético alterno. Al acercarse un EMAT detector a este campo magnético, una fuerza electromotriz será inducida en la bobina y será medida por el VNA.

2.2.4 Arreglo instrumental

En la Figura 2.6 se muestra un montaje experimental. A continuación se dan los parámetros que son utilizados en los instrumentos para estudiar las vibraciones mecánicas de un sistema elástico usando ARS.

1.- El generador de la señal VNA, debe programarse con los siguientes parámetros:

- Intervalo de frecuencia de 200 Hertz en cada corrida.
- 1000 puntos en este intervalo.
- Tiempo de barrido, por intervalo, de 20 minutos.
- Potencia de salida de 10 decibelios.

La frecuencia mínima es de 250 Hz y la frecuencia máxima de 20 kHz, pero puede cambiar dependiendo de cada experimento.

2.- Para potenciar la señal, el amplificador de audio consta de dos salidas de potencia independientes, ambas son conectadas en paralelo, como una sola, para lograr mayor ganancia, esto se denomina *modo puente*. La perilla del volumen se coloca a la mitad de la máxima amplificación debido a que, a partir de 3/4 partes y hasta el máximo volumen, la señal tiende a distorsionarse en estos aparatos.

3.- Después de ser amplificada, la señal se dirige a un transductor excitador. Este transductor tipo EMAT, consta de un imán y una bobina construida con alambre de cobre de calibre 18 formando un carrete con 45 mm de diámetro y 40 mm de largo. El imán es de neodimio con 24000 Gauss, diámetro de 19 mm y grosos de 9.5 mm.

4.- La onda viaja por el sistema hasta que se establecen patrones de vibración estacionarios.

5.- Se usa un segundo transductor tipo EMAT para medir la respuesta del sistema a la excitación inicial de frecuencia f . La bobina en este caso tiene 14 mm \times 11 mm de

diámetro y largo respectivamente. El calibre de cobre es del número 30, mientras que el imán tiene un diámetro y grosor iguales a 4 mm y 12000 gauss. Este transductor convierte ahora la vibración en un voltaje que se registra en el VNA, mostrando la respuesta del sistema en una gráfica de amplitud en función de la frecuencia. Estos datos también son almacenados para su posterior interpretación y análisis.

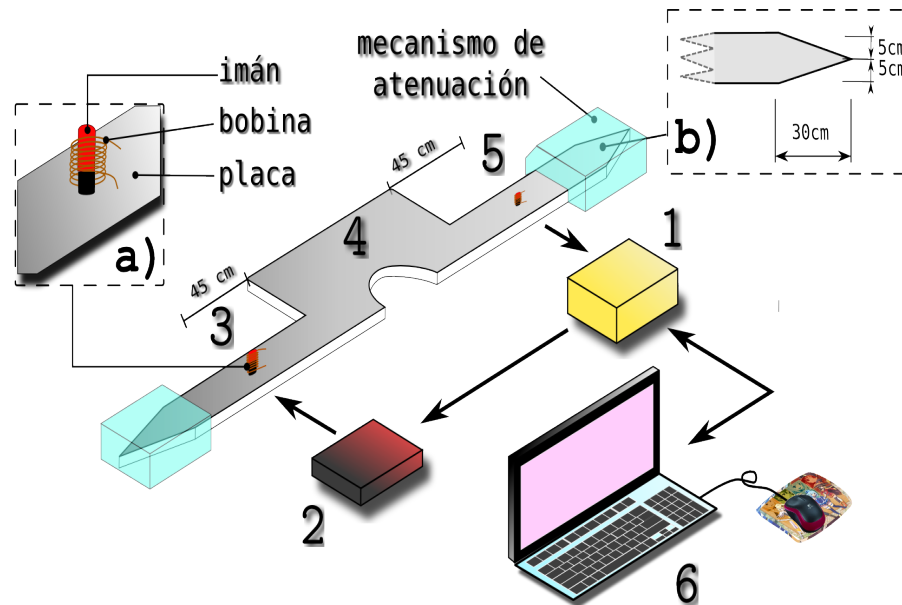


Figura 2.6: Esquema del montaje experimental para ARS. Aquí el sistema elástico es un billar caótico simétrico: primero se genera una señal monocromática de frecuencia f , controlada al usar un VNA (1), esta es potenciada con un amplificador de audio (2). La señal amplificada se envía a un transductor, denominado EMAT excitador (3), el cual convertirá la señal eléctrica, de frecuencia f , en vibraciones mecánicas en el sistema elástico de aluminio (4). Al otro extremo del sistema se coloca un transductor EMAT que medirá las vibraciones de respuesta en el medio estudiado (5), convirtiendo ahora la vibración mecánica en una señal eléctrica. La señal medida es enviada de regreso al VNA. Los datos experimentales son almacenados en una computadora (6) vía el puerto USB-GPIB que, a su vez, controla automáticamente el experimento. En el recuadro a) se detalla la composición de un EMAT, cabe destacar que el imán no entra en contacto con la placa. En el recuadro b) se muestra el corte hecho a la guía de onda para absorber las ondas.

2.3 Ondas mecánicas en barras rectangulares

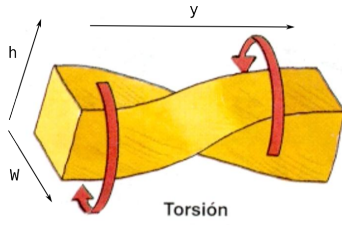


Figura 2.7: Ilustración de una torsión en una barra.

En las varillas o barras¹ se pueden distinguir cuatro tipos de ondas: compresionales, torsionales, flexionales blandas y flexionales duras. Únicamente las ondas torsionales son longitudinales, las otras tres son transversales. A continuación se pondrá especial énfasis en las vibraciones torsionales de una barra con sección transversal uniforme rectangular (ver Figura 2.7), ya que estas serán las estudiadas en el Capítulo 4.

Este tipo de vibraciones satisfacen la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

donde Φ es el ángulo de torsión, $v = \sqrt{\frac{G\alpha}{\rho I}}$ es la velocidad de las ondas de torsión, dada por Navier [66], con: G , el módulo de cizallamiento; ρ , la densidad de la barra; $I = (hW^3 + h^3W)/12$, el momento de inercia con respecto al eje y de la barra (Figura 2.7)

$$\alpha = \frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \frac{hW}{\left(\frac{2m+1}{h}\right)^2 + \left(\frac{2p+1}{W}\right)^2}, \quad (2.2)$$

α es un parámetro geométrico de ajuste (ver referencia [67]). Además h y W son las dimensiones de la sección transversal de la viga. Dado que la barra está libre en uno de sus extremos ($z = 0$), satisface la siguiente condición de contorno

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (2.3)$$

De igual manera, hay que considerar que, para producir las vibraciones torsionales aquí estudiadas, será necesario modificar la configuración hasta este momento empleada en un transductor tipo EMAT. Se coloca una bobina sobre el ancho de la barra y dos imanes perpendiculares a ésta, se ubica uno en cada lado de la barra y con sus polos encontrados (ver Figura 2.8). Si se pone sólo un imán, se produce una vibración que comienza con máxima amplitud en el lugar donde se sitúa el imán, mientras que, en el lado opuesto no hay movimiento, generando un movimiento parecido al de una bisagra y no una torsión como es de esperar.

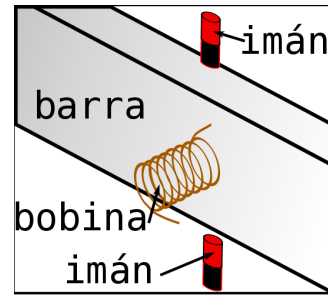


Figura 2.8: Configuración del EMAT para torsiones.

¹Se ha llamado varilla a aquella que tiene una sección transversal circular, mientras que una barra o viga tiene una sección rectangular o cuadrada.

2.4 Vibraciones en sistemas elásticos bidimensionales

Empleando la técnica experimental ARS se pueden generar y medir diferentes tipos de vibraciones en sistemas elásticos. En el caso de sistemas bidimensionales, como billares y placas, se clasifican en general en dos tipos: ondas fuera del plano y ondas dentro del plano. Para definir las, se considerará que el plano principal, muchas veces llamado el plano neutro, es aquel formado por las dos dimensiones mayores. Con respecto a este plano, se considera que las ondas viajeras son fuera del plano cuando la dirección de propagación del vector la onda es perpendicular al vector de desplazamiento de las partículas que componen el material o a un elemento diferencial del mismo (ondas transversales). A su vez el desplazamiento de las partículas es perpendicular al plano principal. Mientras que, las ondas en el plano abarcan dos casos: primero, se tiene la vibración en la que el desplazamiento de la onda está contenida en este plano y la dirección de desplazamiento de las partículas es paralela al vector de propagación de la onda (ondas longitudinales), pero también está contenida en el mismo plano (ver Figura 2.9). El segundo caso de ondas en el plano corresponde al caso en que el vector de onda es paralelo al plano principal, pero esta vez el vector de desplazamiento de las partículas es perpendicular al vector de propagación de la onda y asimismo se encuentra contenido en el plano neutro. Es decir, tenemos ondas longitudinales y transversales en el plano, en ambos casos, tanto el vector de desplazamiento como el vector de onda se encuentran contenidos en el plano principal. Para los análisis llevados a cabo en este trabajo se analizan tanto vibraciones fuera del plano, como dentro del plano. Las configuraciones de los transductores para ondas fuera y dentro del plano se ilustran en las Figura 2.10.

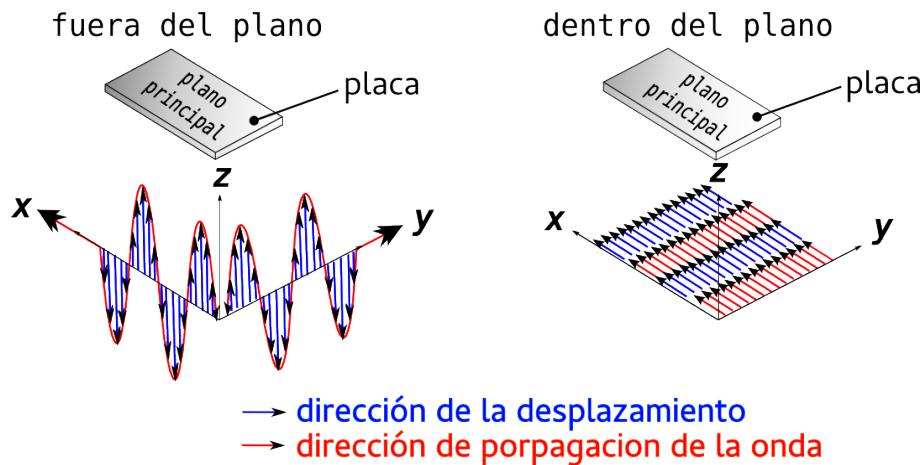


Figura 2.9: Se muestran dos ejemplos de ondas generadas en un sistema bidimensional. En la parte izquierda se tienen ondas transversales fuera del plano, mientras que en la derecha se muestran las compresionales en el plano. Además es posible generar ondas transversales en el plano.

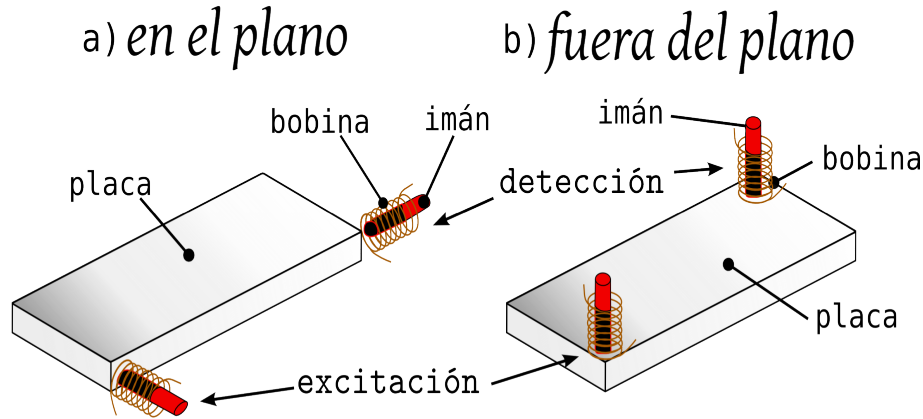


Figura 2.10: Dos formas de colocar los transductores EMATs alrededor de la placa para generar y detectar ondas: a) en el plano y b) fuera del plano.

2.5 Desarrollo experimental para el estudio de paquetes de onda en el dominio del tiempo

En la actualidad es bien conocida la técnica experimental ARS en el dominio de la frecuencia, en la que se usan transductores tipo EMAT para detectar y excitar los diversos tipos de ondas mecánicas. Con objeto de adaptar esta técnica, por sus excelentes resultados, al dominio del tiempo, se desarrolló un experimento previo en donde se llevan a cabo detecciones y excitaciones con tres dispositivos diferentes. Para la excitación se usó un vibrador mecánico y un EMAT excitador, mientras que para la detección se emplea un interferómetro láser y un EMAT detector. El objetivo principal es encontrar el mejor conjunto de dispositivos para los experimentos principales. Los comparativos se pueden ver en las seis gráficas de la Figura 2.11.

La excitación y detección empleando los transductores tipo EMAT es sumamente selectiva pero presenta la desventaja de producir una señal aun sin estar presente un medio. Esto produce una línea base de referencia que asciende en función de la frecuencia, en el experimento final. Ahora bien al excitar con el vibrador mecánico, sin importar como que dispositivo se detecta, se miden vibraciones extras, esto es debido a que no es posible desacoplar los diversos tipos de ondas en la placa, además de ser un método de contacto. Por último excitar con EMAT y detectar con láser anula la línea base mencionada con anterioridad y es posible estudiar sólo las ondas deseadas. Presenta la desventaja que a frecuencias por arriba de 18 kiloHertz el láser comienza a mostrar lecturas deficientes. Esto se debe a que la amplitud de la onda en la resonancia comienza a decaer y excede su mínimo límite de medida y, además, la superficie donde éste apunta, debe ser completamente reflectante, o mostrará lecturas erróneas. Al analizar los resultados se considera como la mejor opción excitar usando un EMAT y detectar usando el vibrómetro láser.

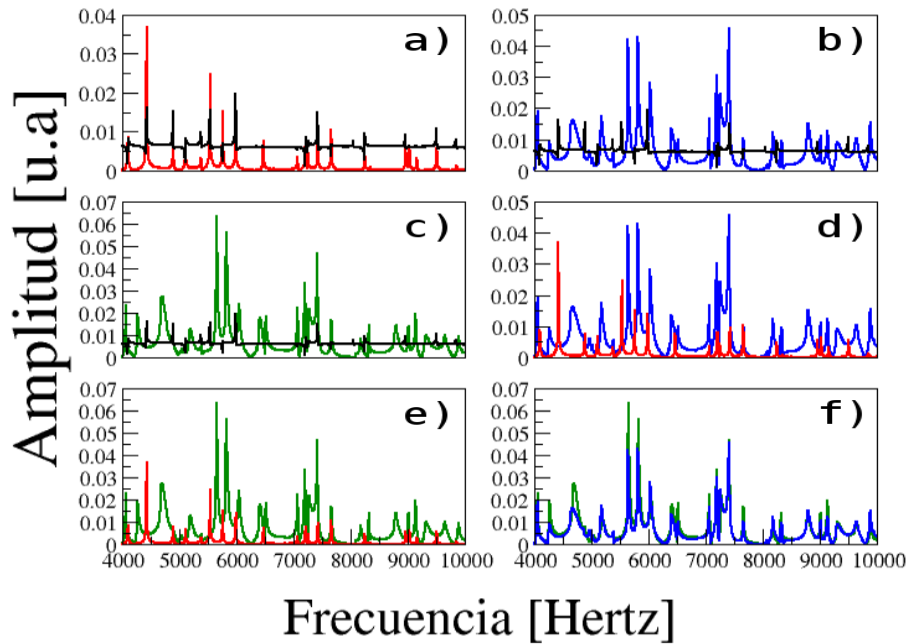


Figura 2.11: Comparativo entre los diferentes dispositivos para excitar y detectar ondas fuera del plano en una placa de aluminio cuadrada de 30×30 cm de $1/4$ de pulgada de grosor. La línea negra corresponde a excitación y detección usando EMATs, la línea roja corresponde a excitación usando un EMAT y detectando con el láser. Para la línea azul se tiene la excitación con vibrador y detección con EMAT y finalmente se tiene en color verde excitación con vibrómetro y detección con láser.

2.5.1 Instrumentos

1.- NI PXI.- Su utilidad es más genérica que la de un VNA, produce la señal enviada a la muestra, controla la automatización en la medición, recibe, filtra y almacena la respuesta y finalmente es posible utilizarla como estación de trabajo para el análisis de datos (ver Figura 2.12).



2.- Transductor EMAT excitador.- Se usa un EMAT como el mencionado anteriormente, la diferencia radica en su configuración, ya que el imán se coloca perpendicular a la bobina.

Figura 2.12: PXI de National Instruments

3.- Amplificador de audio de alta fidelidad.- Potencia la señal que se envía a la muestra, en este caso se emplea un aparato similar al usado en el montaje para ARS, marca Cerwin-Vega y modelo es CV-1200.

4.- Vibrómetro láser Doppler (Fig. 2.13).- Se usa un láser marca Metrolaser VibroMet 500V para medir las vibraciones en las barras propuestas, presenta la ventaja de no tener contacto con las muestras. Además, no hay una línea base como en el caso de la detección con EMATs y su software integrado, permite automatizar la toma de datos. Una de sus desventajas aparece al medir por arriba de los 18 kHz, donde ya no le es posible usar el efecto Doppler, debido a que la vibración es muy pequeña, mientras que los EMATs tienen un rango de medida en frecuencia más altas [65].



Figura 2.13: *Vibrómetro láser Doppler*

2.5.2 Consideraciones experimentales

En los experimento se usan 4 barras de aluminio 1100 de 4.04 metros de largo de sección transversal rectangular con 1 cm de grosor y 3 cm de ancho. Tres de estas barras están constituidas por tres zonas (ver Figura 4.5), en uno de sus costados se tiene un sistema de atenuación de ondas de 44 cm de longitud, a continuación se tiene una parte sin maquinar de 2.02 metros de largo y finalmente una zona con estructura que depende del modelo propuesto por el cálculo numérico. La primera barra se construyó únicamente con la cuña de atenuación. Ahora bien, como en el modelo empleado las fronteras son libres, las barras se suspenden en el aire empleando hilos de nailon colocados en tres posiciones diferentes y alineadas con un nivel tipo láser.

El excitador propuesto es colocado donde comienza el sistema de atenuación. Se envían al EMAT varios pulsos gaussianos centrados en una sola frecuencia, con ello se toman varias medidas y se saca un promedio de la respuesta para eliminar ruidos exteriores, posteriormente se cambia la frecuencia tomando nuevas lecturas. El intervalo de frecuencias usado para trabajar comienza en los 3 kiloHertz y termina en 18 kiloHertz. Los fenómenos analizados se observan con mejores resultados al enviar pulsos con anchura gaussiana de 500 μ s.

Las lecturas, medidas por el láser, se registran en la esquina inferior derecha de cada cuboide (Fig. 4.5), esto es debido a que en las esquinas del cuboide se presenta la máxima amplitud de onda, por ende se puede medir en cualquier otra esquina.

Capítulo 3

Modos normales en el plano de una placa rectangular

En este capítulo se estudian las vibraciones en el plano de una placa rectangular y los resultados de las mediciones de las polarizaciones de la amplitud de modos normales en el plano. También se da un resumen del método numérico conocido como método de ondas planas, con el cual fueron calculados los modos normales en el plano.

3.1 Espectro acústico resonante de la placa rectangular

Previo a obtener los modos normales, es necesario conocer las frecuencias en las cuales aparecen las resonancias que los generan. Las frecuencias se obtienen realizando el espectro acústico resonante de la placa para el tipo de ondas que se desea analizar. Tanto para las ondas en el plano como fuera del plano, los espectros ya han sido estudiados y reportados en la referencia [22]. La Figura 3.1 muestra como se colocan los transductores alrededor de la placa para generar y medir el tipo de onda deseado, de esta manera se obtiene su espectro acústico resonante correspondiente.

3.2 Ecuaciones que rigen las vibraciones en el plano

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento en el plano, en la teoría clásica de placas, [68], son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde h y ρ son el espesor y la densidad de la placa, respectivamente. Las variables $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son los desplazamientos en las direcciones X y Y , respectivamente, mientras que

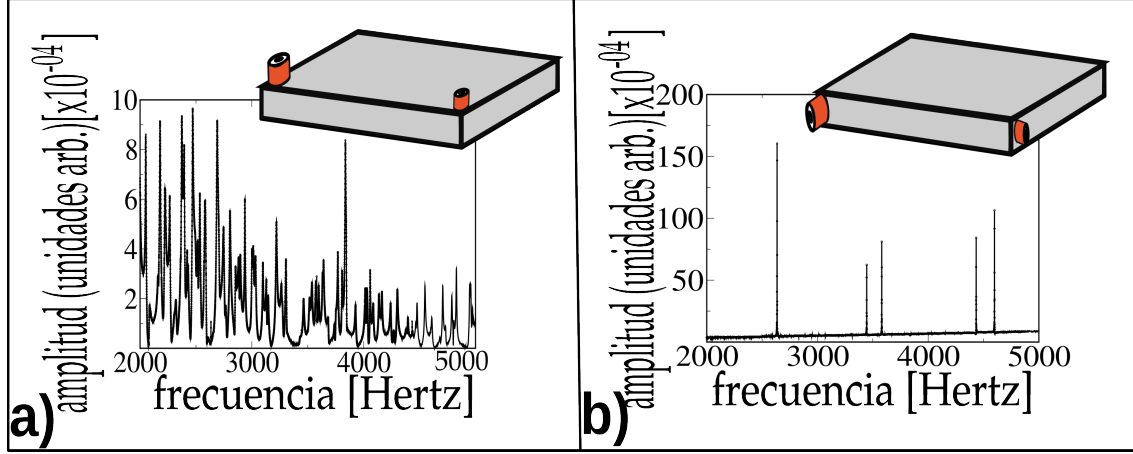


Figura 3.1: Espectros acústicos resonantes de la placa rectangular. En a) se muestra para ondas fuera del plano, mientras que en b) se tiene para las ondas en el plano.

las tensiones de la placa son:

$$\begin{aligned} N_x &= C(e_{xx} + \nu e_{yy}), \\ N_y &= C(e_{yy} + \nu e_{xx}), \\ N_{xy} &= C(1 - \nu)e_{xy}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde ν es la razón de Poisson y C es la rigidez extensional dada por

$$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad (3.3)$$

con E el módulo de Young. Las relaciones deformación-desplazamiento son

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3.4)$$

3.3 Método de expansión en ondas planas

El método de expansión de ondas se refiere a una técnica computacional para resolver ecuaciones diferenciales parciales como un problema de valor propio [70]. Este método es muy popular entre la comunidad que estudia cristales fotónicos (fonónicos) para obtener la relación de dispersión de los cristales artificiales [71, 72, 73, 74]. En la referencia [19] se demostró que el método de expansión en ondas planas se puede implementar para resolver la ecuación de Kirchhoff-Love fuera del plano, también llamada teoría clásica de placas, para sistemas finitos. Este método numérico también es útil para resolver la ecuación de onda en plano para sistemas finitos [69]. La principal diferencia entre el método de expansión en ondas planas y otros métodos numéricos, como el de los elementos finitos, es que las condiciones de contorno no se imponen sino que son más bien simuladas

mediante la introducción de un segundo medio con distintas propiedades físicas. En este método se usa una celda rectangular (ver Fig. 3.2) de dimensiones $a \times b$. La placa está situada en el centro de la celda rodeada por un material huésped que, para una placa con extremos libres, imita el vacío y, para una placa con extremos sujetos, imita un medio extremadamente duro [19].

La celda unitaria se repite periódicamente en ambas direcciones y sus parámetros mecánicos son reemplazados por una serie de Fourier truncada a N ondas planas. Una descripción en detalle del método de expansión en ondas planas utilizado para calcular los modos normales en el plano de placas con extremos libres se da en la referencia [69].

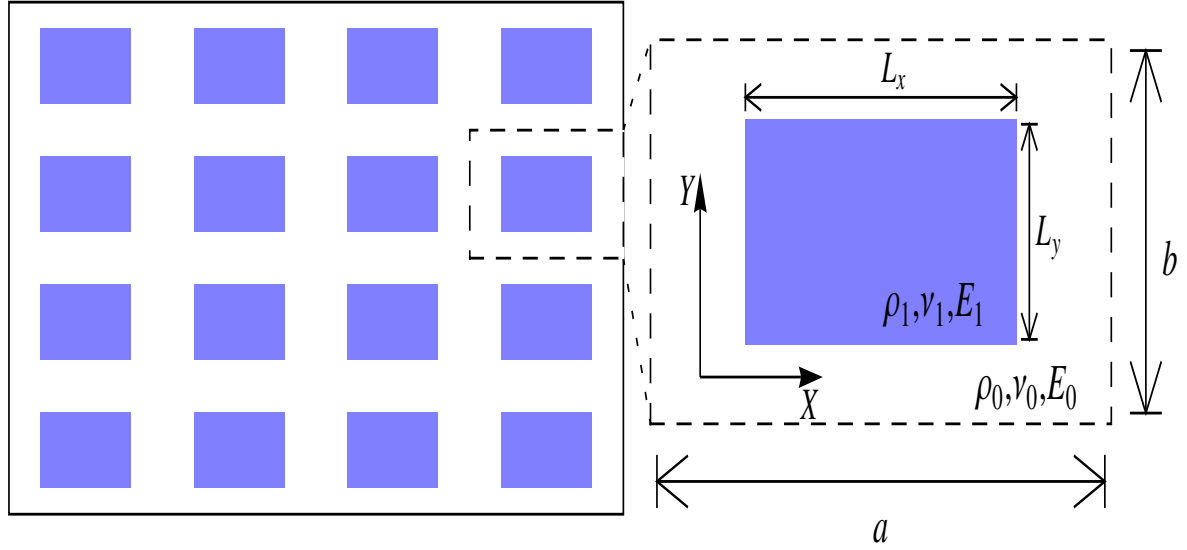


Figura 3.2: A la izquierda se tiene repetición de la placa para utilizar el método de expansión de ondas planas. A la derecha los detalles de la celda unitaria.

3.4 Polarización de ondas en el plano

Como se menciona en la sección 2.4, las ondas mecánicas en el plano pueden ser longitudinales y transversales; en general, en un sistema elástico este tipo de las ondas se encuentran acopladas. Puede verse también en los términos cruzados de las ecuaciones (3.1) y (3.2). En los experimentos además, el acoplamiento de las ondas se pueden mirar en algunos picos de resonancias que no concuerdan con el tipo de onda generado y que tienen amplitud mucho menor comparadas con el resto (ver Figura 3.3). Las ondas puramente longitudinales tendrán componente en una sola dirección y pueden ser medidas colocando el transductor detector en esa dirección, al girar 90 grados el EMAT detector, la componente será cero. Por otra parte, la onda puramente torsional exhibirá valores

únicamente en la dirección paralela al desplazamiento. Debido al hecho de que las ondas están acopladas, exhiben componentes en ambas direcciones tal y como lo hace una onda polarizada. Al colocar un detector orientando el eje mayor del imán con el eje mayor de la placa en un punto sobre ella (ver recuadro (a) de la Figura 3.5), se mide la componente en la dirección u (eje X) y si después se gira 90 grados se obtiene el valor en la dirección v (eje Y). Así se mide la polarización de la onda en un punto. La resolución de las ecuaciones (3.1), también nos dan las componentes en X y Y de tal manera que al final podemos compararlas.

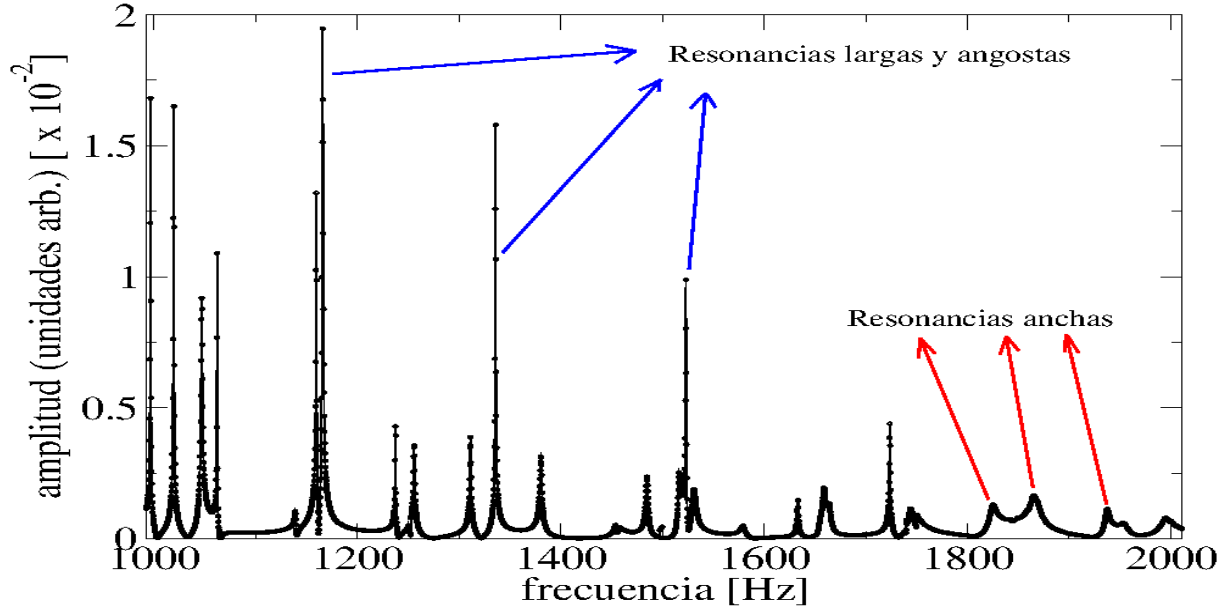


Figura 3.3: Distinción de dos tipos de ondas acopladas en un experimento usando ARS.

3.5 Medición de las amplitudes de onda en el plano

La medida de los componentes $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de las amplitudes de onda de modo normal en el plano se realiza como sigue. Las vibraciones en el plano de la placa de aluminio se generan usando un EMAT situado en un extremo de la placa en la configuración de la Figura 3.5. Este dispositivo es controlado por el VNA, el cual envía una señal de barrido alrededor de la frecuencia de resonancia de la amplitud de onda a medir. Como es bien sabido, trazar la norma y la fase de la respuesta da un círculo en el plano complejo; el radio del círculo es proporcional a la amplitud de la onda. Un ejemplo de este círculo se da en la Figura 3.4. Las mediciones se realizaron en un cuarto de la placa

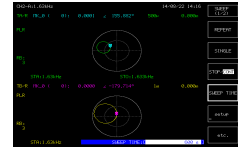


Figura 3.4: Respuesta del sistema a frecuencia f leído directamente del VNA.

en una cuadrícula rectangular. El EMAT mide la aceleración en la dirección del eje de la bobina [75]. La amplitud de onda se mide a continuación utilizando un EMAT situado sobre la placa; el eje dipolar del imán del EMAT es perpendicular al plano X-Y mientras que el eje de la bobina está alineado a lo largo de la dirección X o Y para medir la deformación u o v , respectivamente (ver recuadro b) en la Figura 3.5). Para obtener la amplitud de onda en la placa completa, los datos medidos se reflejaron en los dos ejes de simetría del sistema. En la Figura 3.6 se dan algunas amplitudes de onda de modo normal y se comparan con las calculadas con el método de expansión de onda plana; se obtiene un muy buen acuerdo. Estos modos normales corresponden a los dados en la Figura 3.6 calculados con elementos finitos.

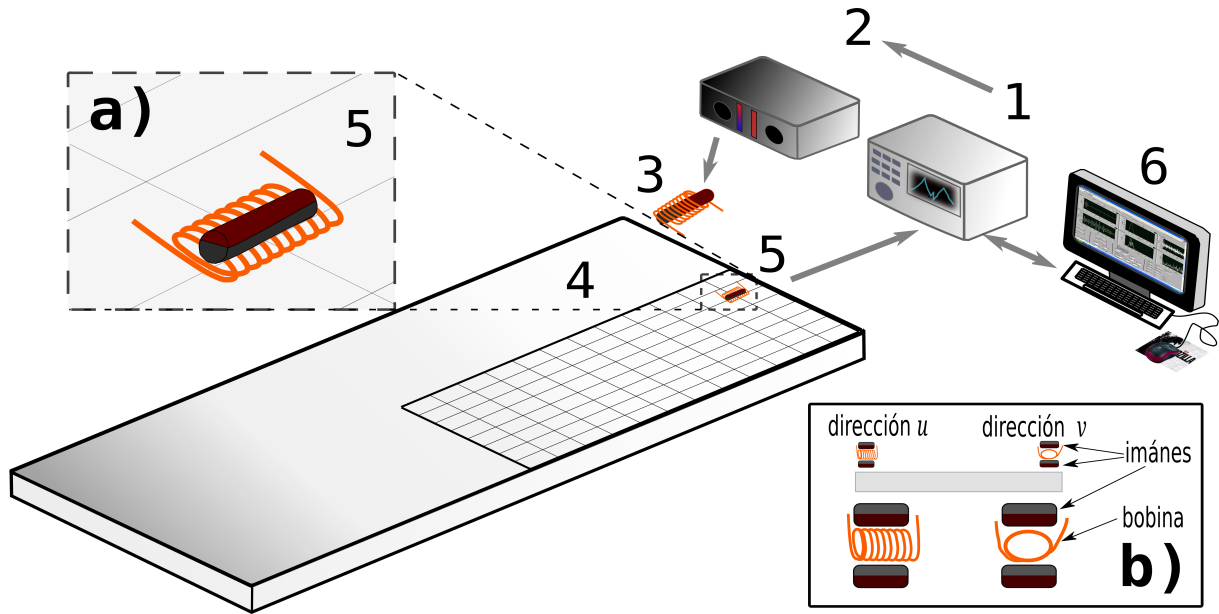


Figura 3.5: Montaje experimental para medir los modos normales en el plano. En 1) se genera la señal con un VNA, la señal pasa a 2) donde es potenciada con un amplificador de audio, la salida llega hasta el transductor excitador en 3). Las vibraciones de la placa (4) son medidas por un EMAT detector en cada intersección de una malla cuadrada sobre puesta en la cuarta parte de su superficie. El recuadro a) muestra la configuración del EMAT detector para medir la deformación en cada cruce de la malla. En el recuadro b), se observa como se coloca el EMAT para medir en las 2 direcciones.

3.6 Modos normales

En la Figura 3.6 se presenta, en forma de tabla, los resultados obtenidos para dos modos normales en sus respectivas frecuencias resonantes, tanto en forma experimental como en el cálculo numérico.

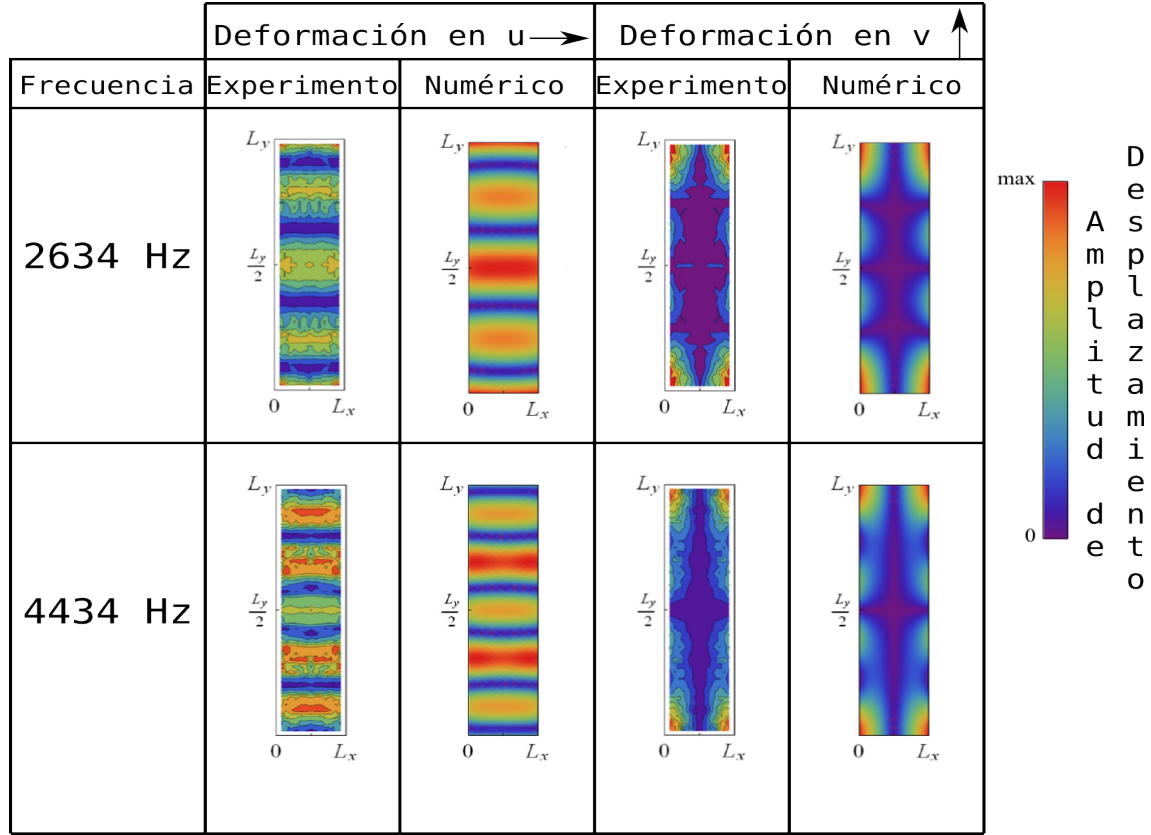


Figura 3.6: Componentes de la deformación horizontal u y vertical v , de dos modos normales en el plano de una placa. La primera fila corresponde al modo a frecuencia 2634 Hz, la segunda fila pertenece al modo a frecuencia 4434 Hz. La primera y la tercera columna son las mediciones experimentales usando la técnica de ARS. La segunda y cuarta columnas corresponden a la solución numérica de las ecuaciones 3.1 usando el método de ondas planas. La primera y segunda columna corresponden a la polarización de u , la tercera y cuarta dan la componente en la dirección v .

Capítulo 4

Vibraciones en el dominio del tiempo

Existen algunos métodos de control de las vibraciones que podrían ser utilizados en sistemas elásticos, como son el control de las frecuencias naturales o resonancias del sistema, en donde por lo general se añade masa al sistema o se cambia la constante de rigidez. También se usan elementos aislantes de vibraciones los cuales se clasifican en activos, que están formados por un servomecanismo que incluye un sensor, un procesador de señal y un actuador, y pasivos, compuestos por un elemento elástico y un elemento disipador de energía; pasivos como muelles metálicos, un corcho, un fieltro, un resorte neumático, etc. Hay también absorbedores dinámicos de vibraciones o masas auxiliares neutralizadoras de vibraciones. Estos se llaman también amortiguadores dinámicos, típicamente son un conjunto de masas y resortes añadidos al sistema. Por último se cuenta con el redireccionamiento de las vibraciones. Se coloca un material, que guía las vibraciones a zonas en donde pueden quedar atrapadas para disiparse con el medio, o ser conducidas a donde se desea. Incluso pueden ser descompuestas en diferentes frecuencias tal y como lo hace un filtro electrónico. El estudio aquí propuesto abarca este tipo de control de vibraciones.

Se muestran por primera vez los estudios experimentales realizados para el control de vibraciones mecánicas para medios elásticos unidimensionales en el dominio del tiempo.

Los tres tipos de control analizados son:

- Filtro de frecuencias.- El cual permite el paso de ciertas frecuencias mientras que otras son rechazadas (surgimiento de bandas permitidas y prohibidas) usando un sistema periódico.
- Atrapamiento de ondas elásticas.- Al producirse una vibración, ésta queda atrapada en una zona de la barra hasta su disipación (surgimiento de las oscilaciones de Bloch). Con ello puede evitarse, por ejemplo, que las vibraciones lleguen a zonas no deseadas que puede deteriorar o dañar una máquina y por otro lado se pueden canalizar vibraciones hacia otra parte donde pueden ser aprovechadas.
- Redireccionar vibraciones.- La oscilaciones en ciertas frecuencias son regresadas o llevadas a otras zonas (aparición del efecto de atrapamiento de arcoíris mecánico), en donde una vibración se dispersa en distintas partes de un sistema como función de sus componentes en frecuencia.

4.1 Fundamento teórico

Para homogeneizar los términos empleados al nombrar las diferentes partes de una barra estructurada. En la Figura 4.1 se establece la denominación que se emplea aquí.

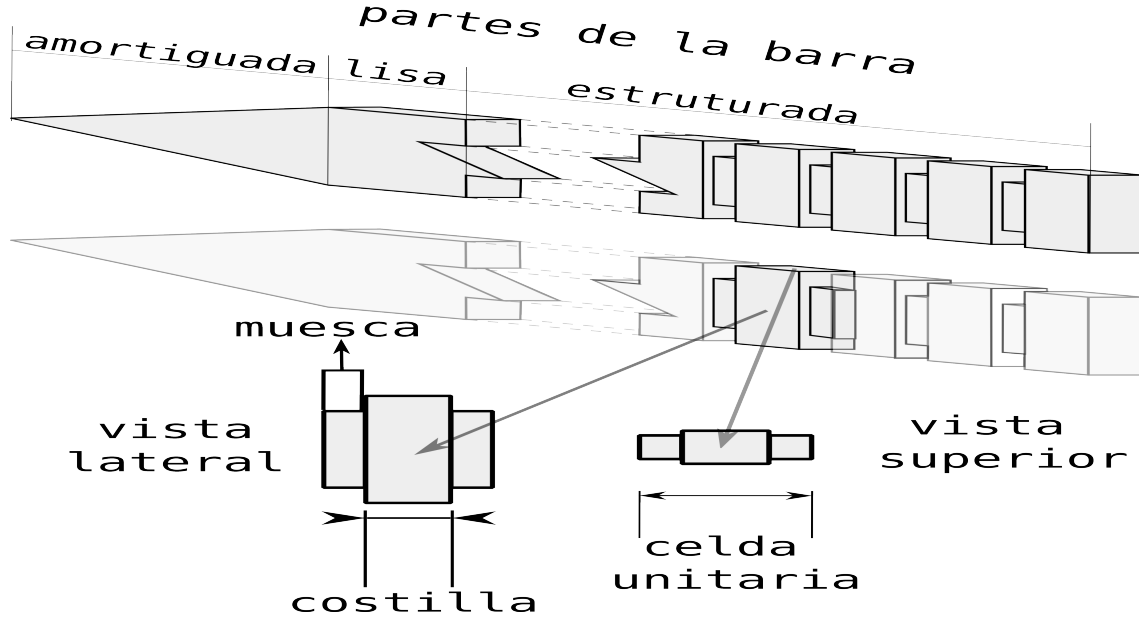


Figura 4.1: *Partes de la barra con estructura.* La figura de la parte superior muestra las tres zonas principales de las que se compone la barra. En la figura media se resalta, en tono gris, la sección donde se definen los principales componentes de una celda unitaria en la estructura.

Como se ve en la Figura 4.1, las barras constan de tres zonas: la zona amortiguada atrapa y atenúa las vibraciones que provienen de la estructura y de la zona lisa, evitando que las ondas reboten y regresen a dicha estructura, produciendo interferencias y patrones estacionarios. La zona lisa es una guía de ondas elástica de 2 metros de longitud, la cual es necesaria para generar ahí un paquete de ondas torsionales y enviarlas hacia la estructura. La zona estructurada representa un segundo medio elástico diferente de la zona lisa, en donde la onda sufre dispersión. Las celdas unitarias de las que esta compuesta dicha estructura cambiará dependiendo de aquello que se requiera estudiar.

La estructura, en cada barra, está constituida de cuboides (costillas) que irán cambiando de longitud, pero no su altura ni su anchura. Estos se acoplan entre sí, y a la zona lisa, mediante cuboides más pequeños de dimensión constante, llamados muescas. La longitud de la costilla, se construye llevando a cabo el llamado modelo de barra independiente [67]. Se sabe que la expresión para encontrar las frecuencias de resonancias de los modos normales torsionales de cada uno de estos cuerpos es [8],

$$f_m^n = \frac{c_n}{2l_n} m, \quad (4.1)$$

donde f_m^n es la m -ésima frecuencia resonante del n -enésimo cuboide, c_n es la velocidad torsional, l_n es su longitud y $m = 0, 1, 2, \dots$ representa el número de modo de cada cuboide. Para observar los fenómenos de control de vibraciones propuestos, es necesario que las frecuencias de los cuboides sean equidistantes. Por tanto, de la ecuación (4.1), es notorio que se puede cambiar la longitud l_n o es posible variar la velocidad de la onda. La velocidad de onda torsional es calculada usando $v = \sqrt{\frac{G\alpha}{\rho I}}$. Con α dado por la ecuación (2.2). La longitud l_n de la costilla n se calcula con la regla [67],

$$l_n = \frac{l}{(1 + n\gamma)}, \quad (4.2)$$

donde γ es el parámetro de ajuste. Si se sustituye la ecuación (4.2) en la ecuación (4.1) se obtiene,

$$f_m^n = \sqrt{\frac{G\alpha}{\rho I}} \frac{(1 + n\gamma)m}{2l}. \quad (4.3)$$

Ahora bien, como se mencionó antes, se desea que las frecuencias de los modos resonantes estén equidistantes, es decir,

$$\Delta f_m^n = f_m^{n+1} - f_m^n = \sqrt{\frac{G\alpha}{\rho I}} \frac{\gamma m}{2l}, \quad (4.4)$$

debe ser constante. Esta ecuación es independiente de el índice n ; y con ello la ecuación empírica (4.2) queda justificada. De aquí es posible graficar la frecuencia de los modos resonantes como función del parámetro γ como se ve en la Figura 4.2.

El espectro de bandas de los modos de torsión para la estructura *chirpeada* como función del parámetro γ , se obtuvo numéricamente, utilizando el método de matriz de transferencia (TM) [65]. Los cálculos se realizaron considerando una viga de aluminio con extremos libres y compuesta por una pieza uniforme con una longitud de 203 cm. La parte estructurada fue determinada usando $\ell_0 = 9.2$ cm. La dinámica de niveles en función del parámetro γ se muestra en la Fig. 4.2. Para $\gamma = 0$ se puede observar una estructura de bandas típica de un sistema periódico. Dado que se utiliza una superficie libre en ambos extremos de la viga, se produce una banda que comienza a frecuencia cero. Luego las brechas y bandas aparecen secuencialmente con la frecuencia. Para $\gamma = 0$ la primer brecha se encuentra aproximadamente entre 6,5 kHz y 9,5 kHz. Esta última frecuencia define el comienzo de la segunda banda, que termina en ≈ 13.5 kHz.

Para valores crecientes de γ , la Fig. 4.2 muestra que los niveles en una banda particular comienzan a separarse linealmente. Las bandas se hacen más anchas y las brechas más estrechas. En la segunda banda, tres regímenes diferentes están claramente definidos. El primero corresponde a los valores $\gamma \approx 0$. En este régimen la densidad de niveles es inhomogénea y tiene máximos cercanos a los bordes de la banda; esto es una reminiscencia del sistema periódico original. El segundo régimen aparece en $0.03 < \gamma < 0.065$ donde la densidad de niveles dentro de la banda, para un valor fijo de γ , es aproximadamente

homogénea, *i.e.*, los niveles son casi igualmente espaciados. El espectro tipo *escaleras de Wannier-Stark* domina este régimen [67]. El tercer régimen aparece cuando las bandas vecinas más cercanas comienzan a superponerse. Por lo tanto, después de un valor crítico del parámetro γ el tunelaje Zenner entre las bandas podría ser observado en forma de un pico de transmisión mejorado [57, 76]. Los resultados presentados aquí corresponden a los dos primeros regímenes.

En la Figura 4.2, que muestra el espectro de frecuencias del sistema como función de γ , se pueden ver líneas horizontales las cuales corresponden a modos normales asociados a la zona lisa de la barra. Cuando la zona con estructura es periódica tiene costillas de la misma longitud y $\gamma = 0$, aparecen entonces bandas de frecuencias permitidas y prohibidas. En la zona comprendida entre $0 < \gamma < 0.03$ los niveles no equidistan por lo que hay transape de niveles y no es posible encontrar la fenomenología aquí estudiada. A partir de $\gamma = 0.03$ se observa que los niveles comienzan a separarse de manera lineal en la segunda banda y es posible observar el fenómeno de atrapamiento de arcoíris mecánico. Cuando se pasa a $\gamma = 0.06$ se notan mejor los espaciamentos de niveles en la misma segunda banda y en donde aparecen las oscilaciones de Bloch. El eje de las ordenadas se muestra por encima de los 20 kHz ya que el alcance experimental se encuentra en el rango audible.

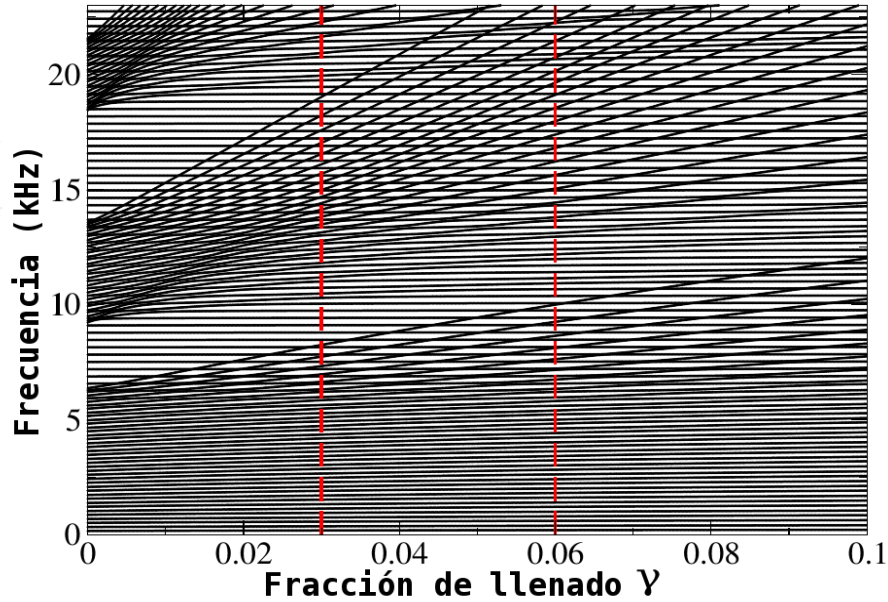


Figura 4.2: Estructura de bandas como función del parámetro γ , de las barras con muescas.

4.2 Dinámica de paquetes de ondas en barras estructuradas: simulación numérica

La evolución temporal de las amplitudes de onda es calculada usando el método de la matriz de transferencia (MMT) discutido con excelentes resultados en la referencia [65]. Éste método consiste en calcular alrededor de 500 modos normales de un sistema completo. Después se expande un paquete de ondas inicial en terminos de los modos normales calculados y finalmente se calcula su evolución temporal. El método numérico se probó con varios sistemas como las gráficas obtenidas en la Figura 4.3. El paquete de vibraciones torsionales es enviado es como un pulso Gaussiano centrado en una frecuencia f .

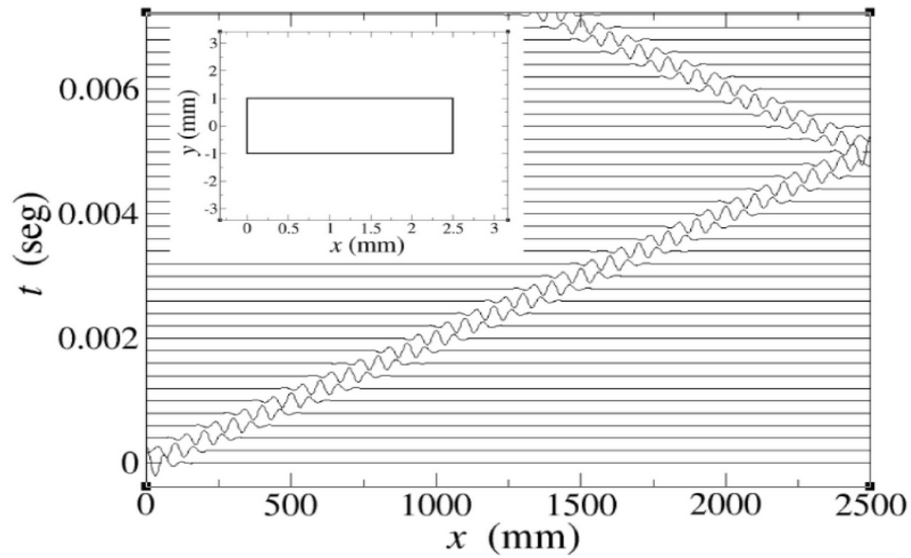


Figura 4.3: Simulación numérica de la dinámica de un paquete de onda en una barra uniforme obtenidas con el formalismo de la matriz de transferencia. En el recuadro muestra el tamaño de la barra simulada. Tiempo vs posición se puede ver claramente el rebote con el extremo de la barra y medir su velocidad.

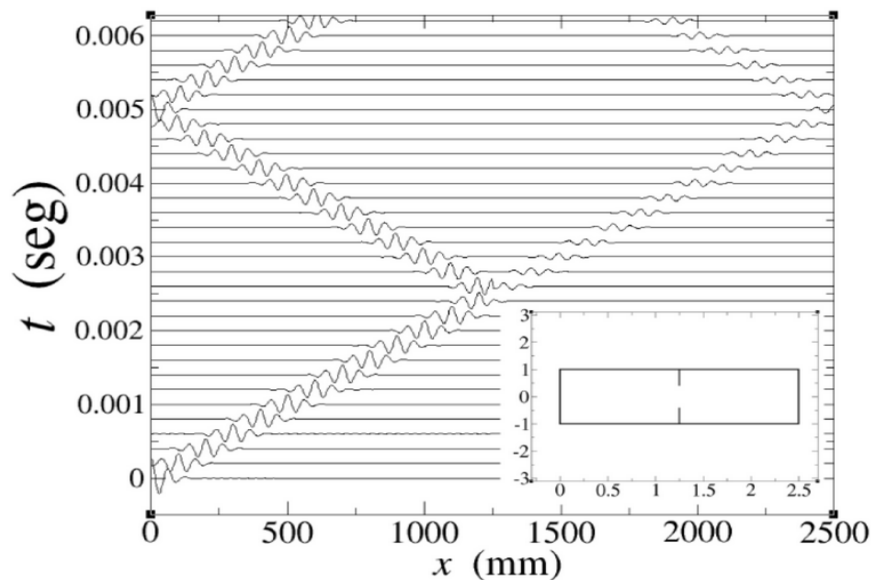


Figura 4.4: *Dinámica del paquete de ondas en una barra con una muesca. Al encontrarse con la muesca, el paquete se divide generando una onda reflejada y otra transmitida al otro lado de la muesca.*

4.3 Montaje experimental para barras estructuradas

En la Figura 4.5 se observa la disposición instrumental llevada a cabo para las barras estructuradas. El detalle de la cuña en un extremo, dada su importancia, se muestra en la Figura 4.6.

4.4 Resultados experimentales

En cada una de las siguientes subsecciones se muestran las dimensiones de maquinación hechas empleando el diagrama de la Figura 4.2 de la sección numérica. Además se da una breve explicación del efecto que se desea probar.

4.4.1 Barra lisa

Antes de construir los sistemas con estructura, se utiliza una barra lisa de sección transversal rectangular a la que únicamente se le fabrica una cuña en uno de sus extremos, con las dimensiones geométricas indicadas en las Figuras 4.6 y 4.7. Los objetivos son:

1. Comprobar o medir experimentalmente la velocidad de las ondas torsionales en aluminio para barras de sección transversal rectangular.

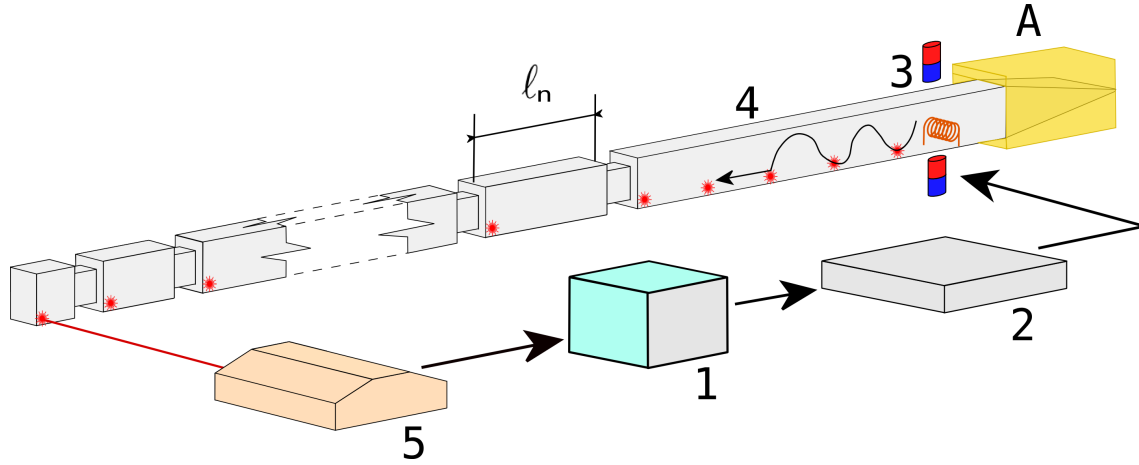


Figura 4.5: Montaje experimental. En (1) se tiene el PXI que genera el pulso gaussiano, adquiere y almacena los datos. En 2) se tiene un amplificador de audio que potencia la señal y la envía al EMAT en (3) el transductor produce la onda torsional mecánica que viaja a través de la barra (4). El vibrómetro láser (5) mide la señal de respuesta la cual regresa al PXI. Además, la figura muestra en A el sistema pasivo de absorción de ondas junto con la cuña. Por último se tiene la longitud ℓ_n de la costilla n -ésima calculada con la ecuación 4.2.

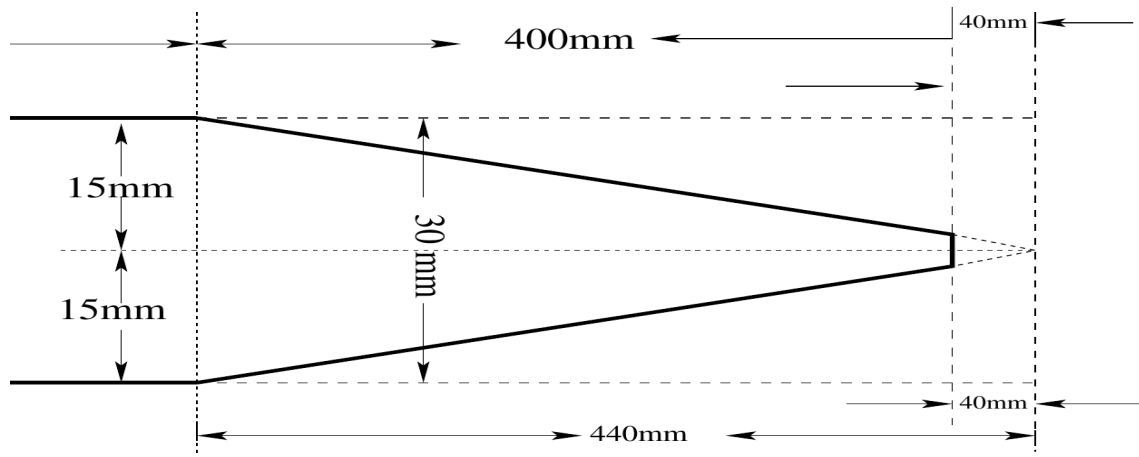


Figura 4.6: Dimensiones del corte en forma de cuña realizado en un extremo de las barras.

2. Probar que realmente el sistema de absorción pasivo diseñado atrapa la onda y la amortigua para que no regrese al sistema, interfiriendo con las vibraciones que se desean medir.
3. Seleccionar un adecuado tamaño del ancho del pulso gaussiano.

Todos los experimentos subsecuentes la excitación se realiza en el extremo de la barra después de la cuña. Las medidas se van tomando cada 10 cm a lo largo de la barra simple, comenzando desde el extremo opuesto a la cuña y terminando muy cerca de la excitación.

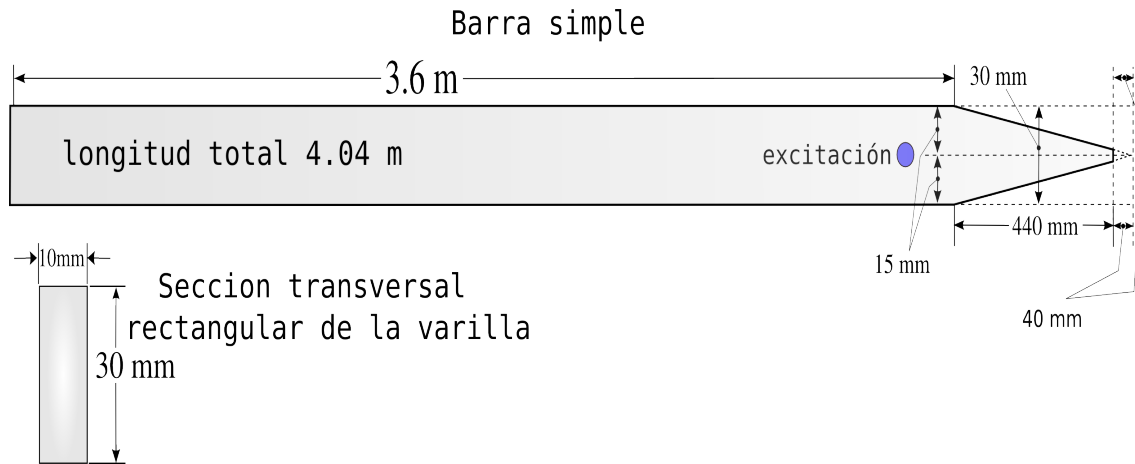


Figura 4.7: Detalles de las dimensiones físicas de la barra lisa o barra simple.

4.4.1.1 Resultados barra lisa

En la Figura 4.8 se muestran algunos de las medidas experimentales a lo largo de la barra simple cuando un pulso torsional gaussiano viajando a través del sistema con tres diferentes anchos (columnas) y centrado en las frecuencias de 4 y 8 kiloHertz (filas). El primer efecto observado, como era de esperarse, es que el ancho del paquete, eje del tiempo, crece. Para seleccionar un ancho de paquete adecuado se toman en cuenta algunos factores: el pulso enviado al llegar a la estructura sufrirá reflexión y refracción, por ello la reflexión no debe interferir con la onda original reflejada en un extremo, el ancho no debe abarcar muchas frecuencias pues pueden existir fenómenos de borde cuando se analizan las bandas y los gaps, por otro lado, un pulso muy angosto no permite observar los fenómenos de atrapamiento de arcoíris y oscilaciones de Bloch; los experimentos muestran que el ancho adecuado es de aproximadamente de $500 \mu s$.

La primer columna de la Figura 4.8, correspondiente a una frecuencia centrada de 4 kHz, revela que la cuña no es muy eficiente a bajas frecuencias, ya que es posible ver la vibración en forma de V con menor amplitud. Este rebote no es deseable para los objetivos experimentales de estos estudios, por ello se agrega un sistema de absorción pasivo de ondas, que elimina casi en su totalidad la onda reflejada.

Por último, en algunas de las gráficas surgen líneas que no están en concordancia con el resto de los datos apareciendo amplitudes o vibraciones en otras zonas de la gráfica, indicada por una flecha en la Figura 4.8. Esto se debe a que la barra no esta completamente pulida y tiene imperfecciones en su superficie, así cuando el láser toma las lecturas en esa zona muestra resultados erróneos.

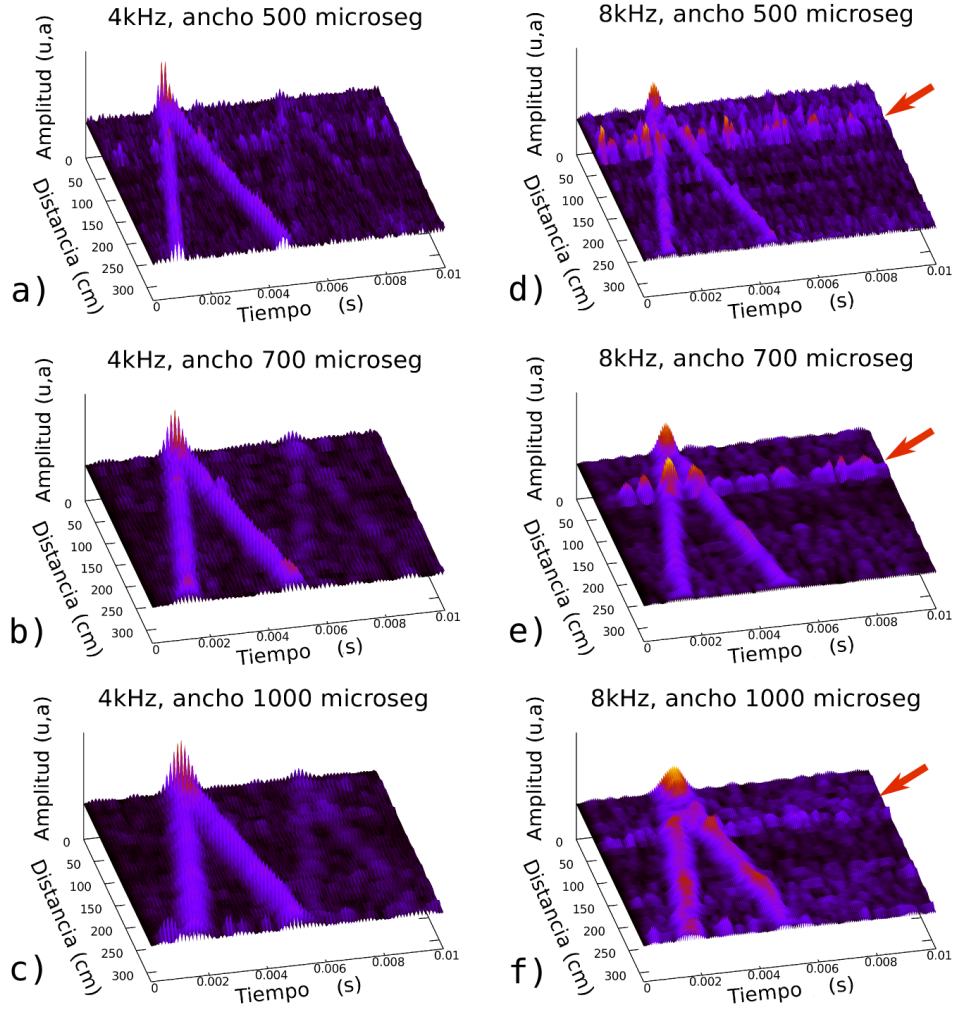


Figura 4.8: Las flechas rojas muestra una zona donde el láser tomó lecturas con errores.

Con los datos adquiridos para esta barra, es posible calcular la velocidad de la onda torsional experimentalmente y con ello corroborar el dato introducido en los cálculos numéricos. El cálculo se realiza a partir de la Figura 4.9, donde se observa que el pulso tarda 3 ms en recorrer toda la barra y regresar al punto de origen, la velocidad corresponde a 1867.04 m/s.

De las mediciones experimentales de la Figura 4.9 es fácil calcular la velocidad de la onda torsional como,

$$Velocidad = \frac{6.6 \text{ m}}{0.0035 \text{ s}} = 1867.04 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (4.5)$$

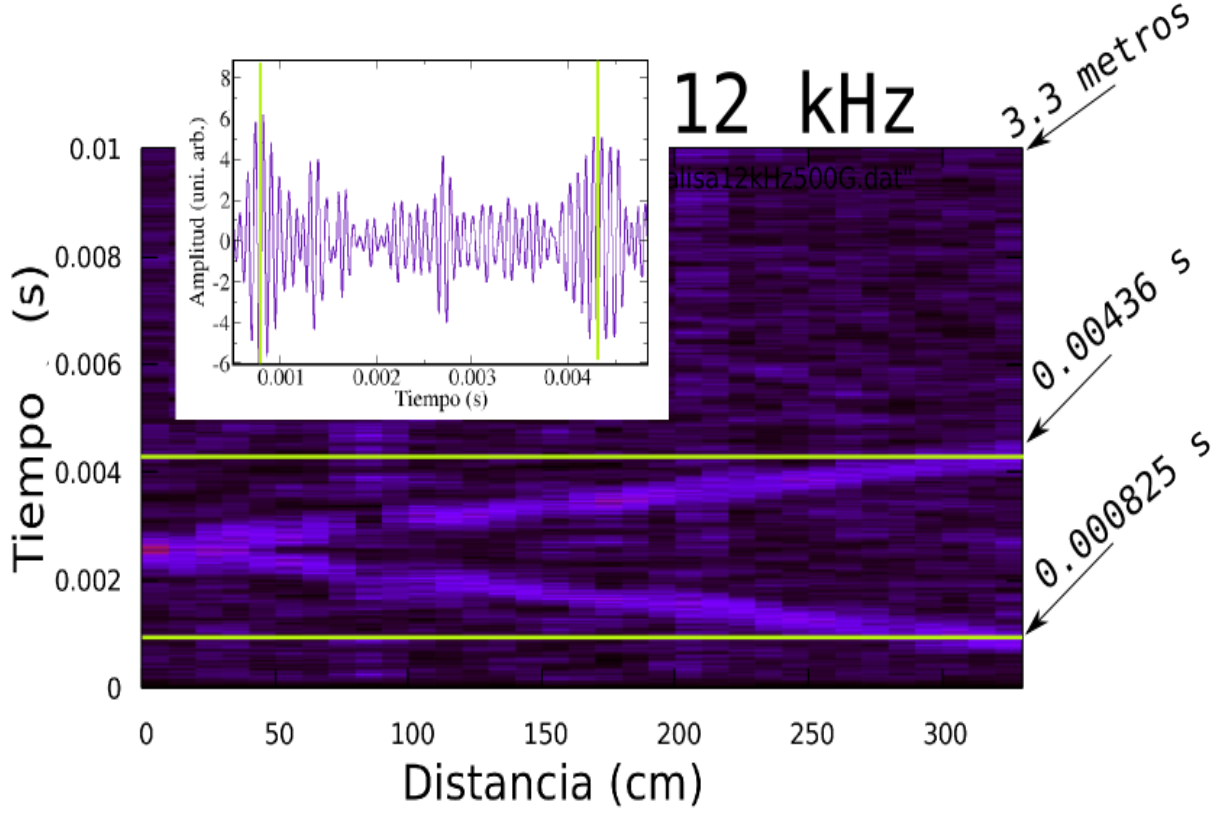


Figura 4.9: Las líneas verdes continuas muestran el pulso original enviado y el pulso que regresa al origen tiempo después. El recuadro superior muestra los máximos de dicho pulso al ser enviado y su regreso.

4.4.2 Barra estructurada periódica

La primera barra estructurada se diseña con una estructura periódica en uno de los extremos, sus dimensiones se muestran en la Figura 4.10.

De acuerdo a la gráfica de la Figura 4.2, cuando el campo $\gamma = 0$, se tienen intervalos de frecuencia en donde las vibraciones atraviesan la estructura, llamadas bandas de transmisión e intervalos de frecuencia donde las vibraciones no pueden atravesar la estructura, denominadas comúnmente como brechas. Vale la pena recordar que el cálculo numérico se lleva a cabo únicamente hasta los 22 kHz debido a que los instrumentos de medición trabajan en el rango audible.

Las tres primeras bandas de transmisión, obtenidas por el cálculo numérico para la estructura periódica, se encuentran en,

$$\text{Banda} \begin{cases} \text{Primera} & 0 \text{ Hz hasta } 6 \text{ kHz}, \\ \text{Segunda} & 9 \text{ kHz hasta } 13 \text{ kHz}, \\ \text{Tercera} & 19 \text{ kHz hasta } 22 \text{ kHz}. \end{cases}$$

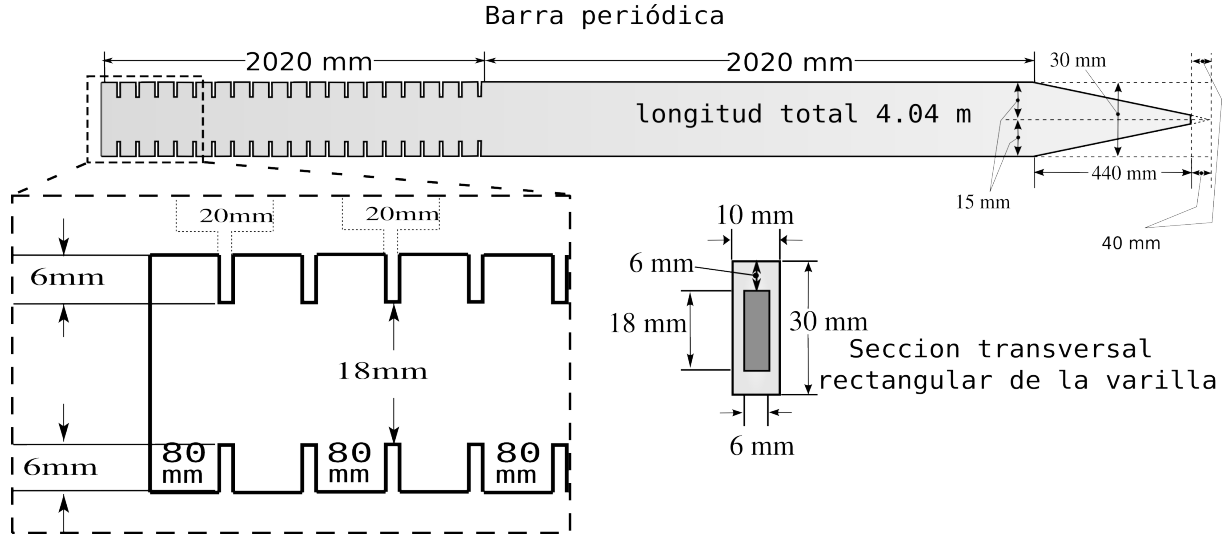


Figura 4.10: Dimensiones de la barra periódica.

Mientras que las tres primeras zonas prohibidas estan en,

$$\text{Brechas} \begin{cases} \text{Primera} & 6 \text{ Hz hasta } 9 \text{ kHz}, \\ \text{Segunda} & 13 \text{ kHz hasta } 19 \text{ kHz}, \\ \text{Tercera} & 22 \text{ kHz hasta no definido.} \end{cases}$$

Opuesto a lo que pasa en estado sólido, para una estructura mecánica periódica, se puede ver fácilmente que mientras las banda de transmisión se hacen mas pequeñas conforme aumenta la frecuencia, las bandas prohibidas comienzan a crecer.

4.4.2.1 Resultados experimentales barra periódica

Los experimentos se realizaron en el intervalo de frecuencias, centrando el paquete gaussiano desde 3 kHz a 20 kHz. Los resultados más significativos se muestran en las Figuras 4.11 y 4.12, en donde las filas nos muestran una banda de transmisión seguida de una banda prohibida. Así, es posible analizar la fenomenología suscitada en las dos primeras bandas y los dos primeros gaps.

¿Qué sucede cuando la frecuencia central del pulso gaussiano corresponde a una frecuencia de la banda permitida?. La vibración se produce en la región uniforme y viaja con velocidad constante. Al llegar a la frontera con la estructura, parte de la vibración es transmitida y parte reflejada, tal y como sucede en fenómenos ondulatorios de propagación de la luz, del sonido, etc, al llegar a una interfase. La onda torsional mecánica que entra a la estructura periódica cambia su velocidad, a manera de transmitirse con un segundo material, viaja hasta llegar al fondo de la estructura y regresa hasta encontrarse de nuevo con la frontera de la región uniforme. Una vez más, hay división de la onda

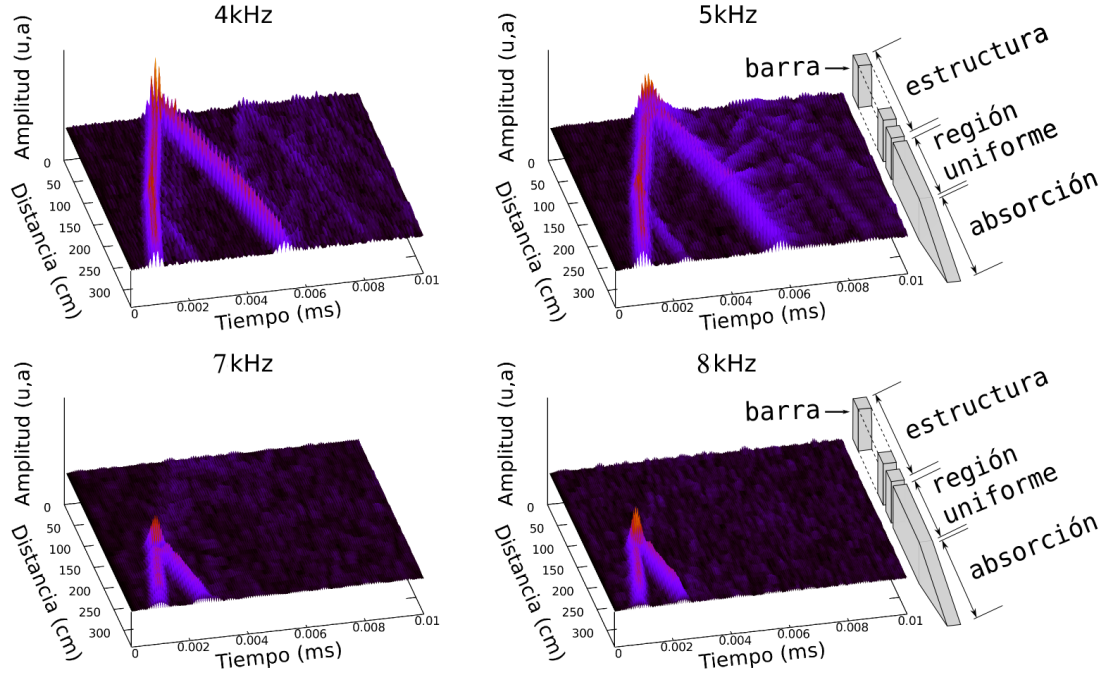


Figura 4.11: En la segunda columna se muestra una representación esquemática de la barra para poder observar de mejor forma los rebotes en las fronteras entre la estructura y la zona homogénea. En (a) y (b) la estructura es capaz de permitir la transmisión del paquete, mientras que en (c) y (d) la estructura no permite el viaje del paquete el cual rebota generando bandas de transmisión prohibidas.

viajera en dos partes, transmisión y reflexión. El fenómeno se observa claramente en las 4 gráficas cuya frecuencia central está en las bandas de transmisión (ver Figura 4.11 en 4 y 5 kiloHertz y Figura 4.12 en 11 y 12 kiloHertz). Para un pulso centrado en 5 kHz, la vibración que rebota con el fondo de la estructura, al llegar al límite de la estructura y la región uniforme muestra una reflexión muy tenue.

Las cuatro gráficas restantes de las Figuras 4.11 y 4.12, muestran la evolución temporal de pulsos gaussianos centrados en frecuencias en donde se tiene una banda prohibida o brecha. Al igual que en el caso anterior, se envía la vibración torsional desde la región uniforme. El pulso viaja con la misma velocidad que la exhibida en los casos de las bandas permitidas hasta llegar al inicio de la estructura periódica. Se puede observar claramente como la vibración choca en la interfaz y rebota. Esto produce que la vibración no se transmita a la estructura periódica generando zonas de frecuencia en las cuales no es posible que el paquete viaje al fondo de la barra.

De estas mismas figuras es posible analizar, de manera cualitativa, como la amplitud de la vibración decae a medida que la frecuencia se aumenta debido a que se requiere mayor energía para producir la vibración torsional. Esto es visiblemente claro en las zonas donde no hay vibración, ya que el ruido de fondo comienza a aparecer en un tono

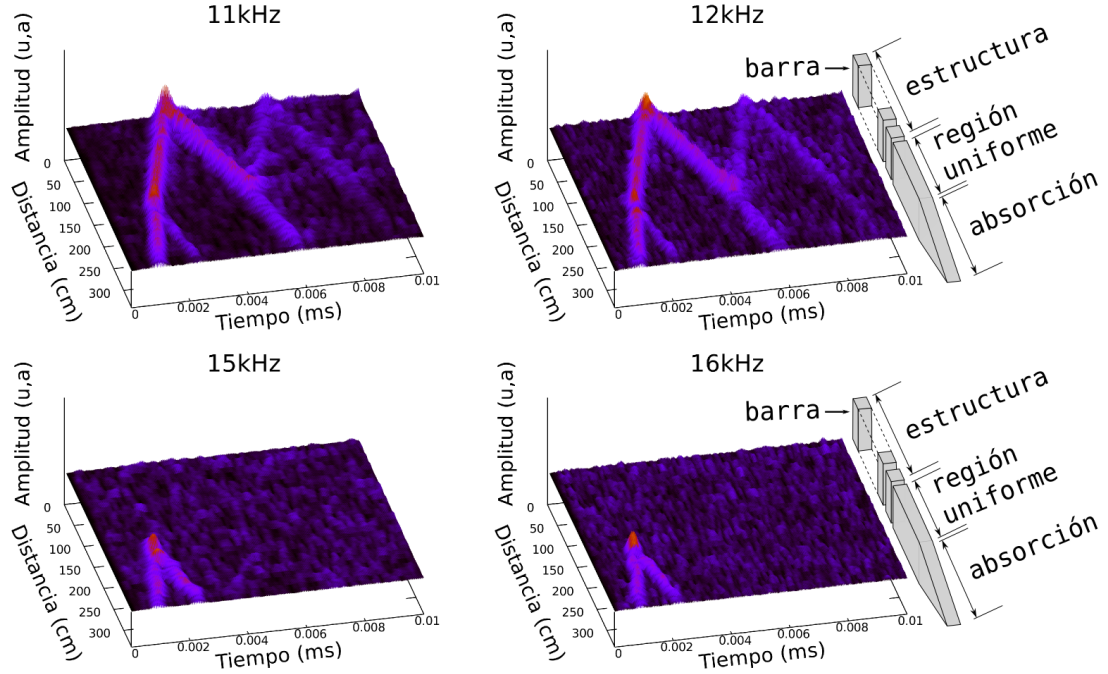


Figura 4.12: *Dinámica de un paquete de ondas en la segunda banda y la segunda brecha.*

de color similar al de la vibración en forma de V invertida.

Las muestras con parámetros chirp $\gamma = 0.03$ y 0.06 constan de 20 celdas con longitud variable ℓ_n , determinadas por la Ec. (4.2) con $\ell = 92$ mm. Estas estructuras *chirpeadas* exhiben los dos comportamientos no intuitivos de gran interés que son: el atrapamiento mecánico de arcoíris y las oscilaciones mecánicas de Bloch. El paquete de ondas con un ancho inicial de 0.5 ms tiene una frecuencia central, f_C que se ira cambiando. La anchura utilizada en el dominio del tiempo implica que el paquete de ondas tiene un ancho espacial de 0.875 m en la parte uniforme de la barra ya que la velocidad de las ondas de torsión en la barra es $c = 1750$ m/s.

Estudiemos ahora el caso de las estructuras *chirpeadas* donde se ha caracterizado el análogo mecánico de las oscilaciones electrónicas de Bloch.²

4.4.3 Oscilaciones de Bloch en medios elásticos mecánicos

Las oscilaciones de Bloch fueron observadas en otros sistemas [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. En medios elásticos se han probado las escaleras de Wannier-Stark, las cuales corresponden al mismo fenómeno, en el dominio de la frecuencia. Se presenta aquí, por primera vez el estudio de las BO (oscilaciones de Bloch) para ondas mecánicas torsionales en un barra rectangular con la geometría mostrada en la Figura 4.13 .

²Los siguientes dos resultados experimentales se presentan en 2D para poder comparar con los cálculos numéricos.

En el diagrama de la Figura 4.2, la segunda línea vertical corresponde al espectro para un valor de $\gamma = 0.06$. Se observa que la segunda banda esta entre 14 kiloHertz y 16 kiloHertz. Se mostrará que en el centro de dicha banda es donde se presenta el fenómeno de las BO.

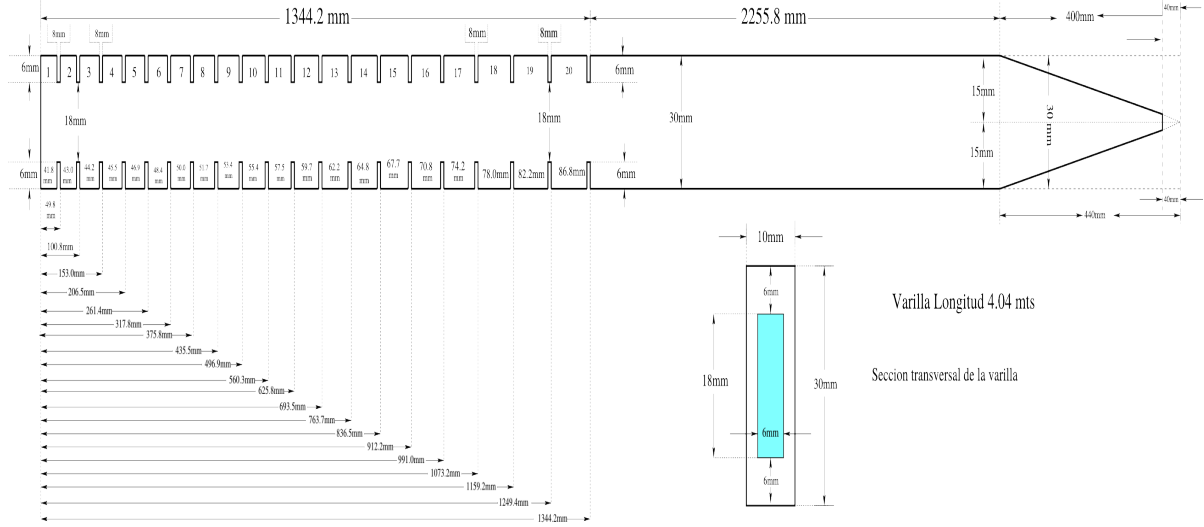


Figura 4.13: Dimensiones de la barra que muestra las oscilaciones de Bloch.

Las oscilaciones mecánicas de Bloch están apareciendo claramente en el segundo régimen ($0.03 < \gamma < 0.065$), cuando la separación entre los niveles en la segunda banda es constante. Para ambos regímenes ($\gamma > 0$), el modelo analítico simple, dado en la sección 4.1, indica que el espaciamiento entre niveles es constante y está dado por

$$\delta f_B = \gamma \frac{c}{2\ell_0}. \quad (4.6)$$

Para el parámetro γ considerado (6 %) la separación predicha es $\delta f_B \approx 610$ Hz, en buen acuerdo con la separación obtenida usando el método de la matriz de transferencia, $\Delta f^{(TM)} = 600$ Hz.

La dinámica del paquete de ondas se muestra en la Figura 4.14, donde se observa un comportamiento oscilante dentro de la zona estructurada de la barra. Los gráficos de la columna izquierda (derecha) corresponden a los datos experimentales (simulaciones numéricas) obtenidos para la propagación de paquetes de ondas con dos frecuencias centrales f_c diferentes, dentro de la segunda banda permitida. El período medido de la oscilación de Bloch es ≈ 1.6 ms en ambos casos, en buen acuerdo con las predicciones del método de la matriz de transferencia, $T_B = 1/\delta f_B^{(TM)} \approx 1.66$ ms y el modelo analítico, para el cual $T_B = 1/\delta f_B \approx 1.64$ ms, este tiempo es único para cada banda. Este fenómeno es la versión mecánica de las oscilaciones electrónicas de Bloch. También se observa en la Figura 4.14 que una pequeña porción de la energía del paquete de ondas se filtra hacia la parte uniforme del sistema. Sin embargo, el fenómeno es muy robusto y se observan

claramente cuatro oscilaciones. Las oscilaciones de Bloch se observan mejor en los gráficos experimentales, debido a el uso de un sistema de aislamiento pasivo de vibración usado para atenuar la onda que se propaga al lado derecho de la viga. Observe que las simulaciones numéricas de las figuras (b) y (d) también muestran múltiples reflexiones en la parte uniforme de la barra.

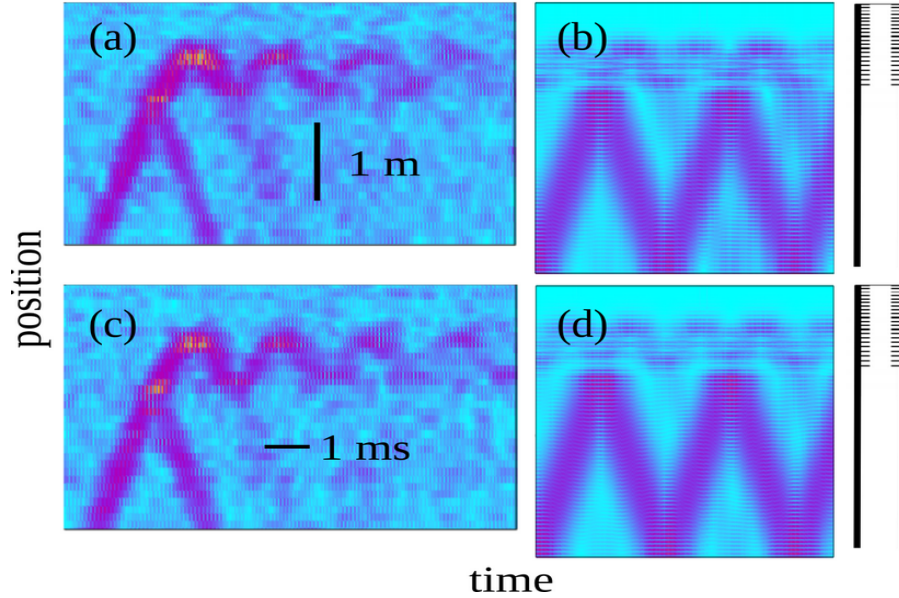


Figura 4.14: Las oscilaciones de Bloch son evidentes en un haz con una estructura chirpeada ($\gamma = 0.06$). Las columnas izquierda y derecha corresponden a los resultados experimentales y numéricos, respectivamente. En los casos (a) y (b) el paquete de ondas tiene una frecuencia central $f_C = 14,5$ kHz; En los casos (c) y (d) $f_C = 15.0$ kHz.

4.4.4 Atrapamiento de arcoíris mecánico

Ahora, discutamos la muestra con $\gamma = 0.03$, cuyo período de oscilación esperado, de acuerdo con la Ec. (4.6), es $T_B = 3.3$ ms. El fenómeno de atrapamiento de arcoíris adquiere su nombre debido a que al llevar a cabo el experimento se dirige un haz de luz hacia una estructura con un cierto gradiente de profundidad. A medida que el haz penetra, comienza a descomponerse en diferentes longitudes de onda, lo que produce que los colores sean atrapados en diferentes segmentos de la muestra [25].

La barra se construye con el diseño de la Figura 4.15

Para el caso de una barra elástica, se observa que la dinámica de un paquete gaussiano penetra hasta cierta profundidad en la estructura y rebota. A medida que se cambia poco a poco la frecuencia f_c central aumentandola, el paquete gaussiano va penetrando a diferentes profundidades a lo largo de la estructura para después rebotar y salir de la estructura (ver Figura 4.16).

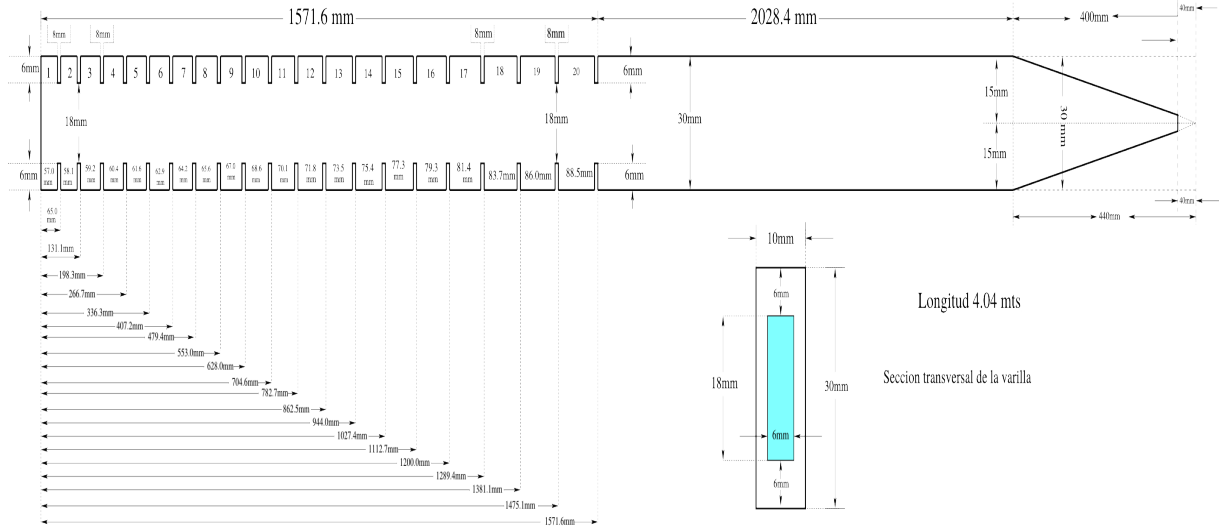


Figura 4.15: Esquema de las dimensiones de la barra estructurada con $\gamma = 0.03$, que exhibe el efecto de atrapamiento de arcoíris mecánico para ondas torsionales.

Los resultados correspondientes se muestran en la Fig. 4.16. Es notable que, en lugar del comportamiento oscilatorio, el paquete de ondas se refleja a diferentes profundidades dentro del sistema estructurado, cuando la frecuencia central f_C se cambia dentro del rango de frecuencias de la segunda banda. El paquete de ondas penetra más profundamente en la barra al aumentar los valores de f_C . Esta observación puede ser considerada como el resultado más importante de este capítulo ya que no sólo representa el análogo mecánico del efecto de atrapamiento de arco iris, sino que también da la ubicación, dentro de la estructura mecánica, en la que comienzan a desarrollarse las oscilaciones de Bloch. En este caso, el paquete de ondas contiene una oscilación rectificada dentro de la región estructurada. En otras palabras, la onda que viaja de regreso llega primero a la interfaz donde se transmite parcialmente a la región homogénea y parcialmente se refleja hacia la estructura, como se ve en los paneles izquierdos de la Fig. 4.16, que describen la caracterización experimental.

Las simulaciones numéricas de la evolución temporal del paquete de ondas, que se muestran en los paneles de la derecha de la Fig. 4.16, confirman las observaciones experimentales. También se puede notar que el período observado en las Figs. (c), (e) y (g) está aumentando con la frecuencia hasta llegar a $0.8 T_B$ que es el caso límite y donde comienzan las oscilación de Bloch con su período correspondiente T_B . Este es un nuevo tipo de oscilación, una oscilación de tipo arcoíris-Bloch rectificada, ya que su período es más grande, a frecuencias mas altas como el efecto de atrapamiento de arcoíris.

La aparición del atrapamiento de arcoíris en la viga con un parámetro γ más pequeño puede explicarse en términos de la estructura periódica local utilizando el modelo de barra independiente [67] como sigue: en este caso, el sistema puede considerarse como un cristal mecánico estructurado en el que existe una variación local de las brechas a lo largo de la

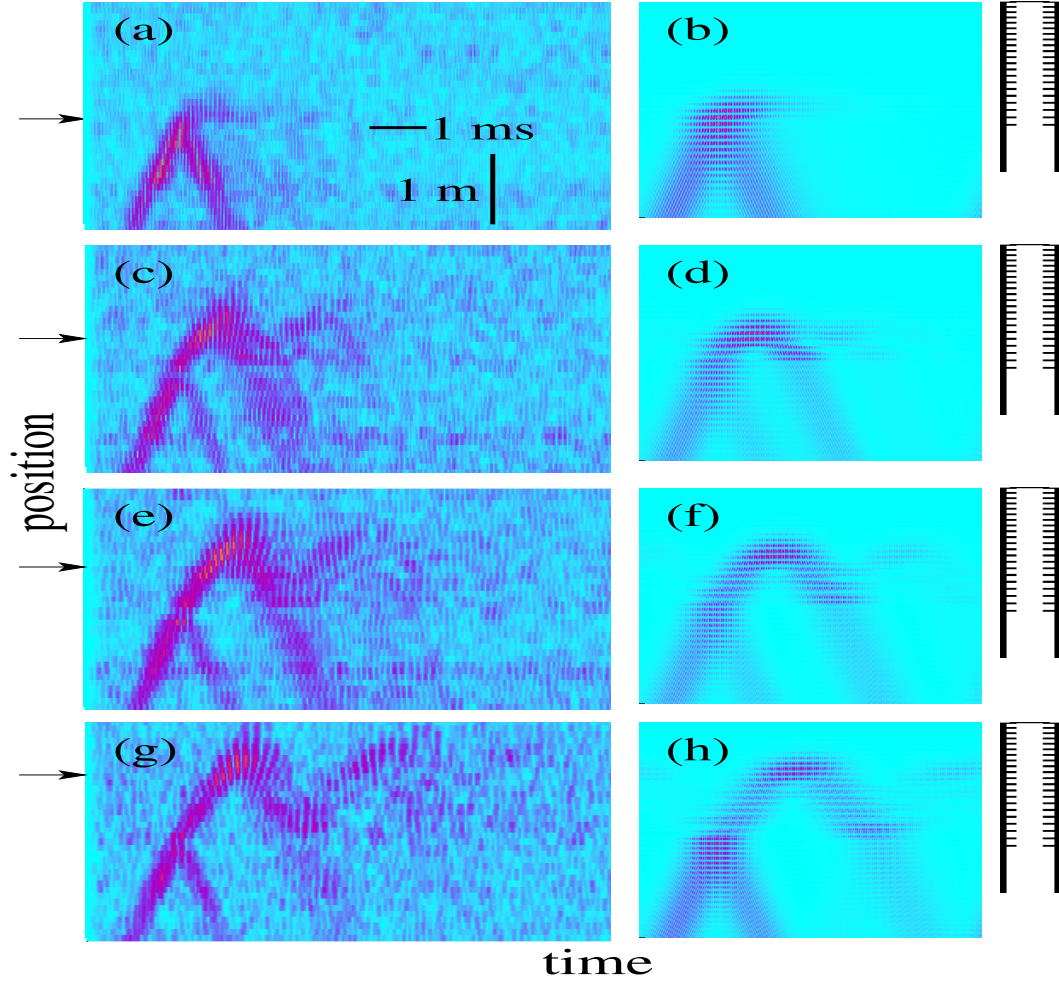


Figura 4.16: El atrapamiento del arco iris es evidente en una estructura mecánica con $\gamma = 0.03$. Las columnas izquierda y derecha corresponden a los resultados experimentales y numéricos, respectivamente. La frecuencia central f_c del paquete de ondas es 9 kHz para los casos (a) y (b), 10 kHz para los casos (c) y (d), 11 kHz para los casos (e) y (f) y 12 kHz para los casos (g) y (h). Las flechas indican la profundidad de penetración predicha por el modelo de barra independiente.

estructura. Por lo tanto, la onda que viaja dentro de este cristal cuasi-periódico se está ralentizando gradualmente, ya que la frecuencia de onda que se está propagando se está acercando a las brechas locales [43].

A grandes rasgos, las escaleras de *Wannier-Stark* asociadas a una banda dada j pueden considerarse como una serie de mini brechas, o brechas locales, determinados por la condición de Bragg $k\ell_n = j\pi$ para la celda n y siendo k el número de onda; aquí $j = 1, 2, \dots$ define el orden de la banda. Para la banda de interés, $j = 1$, y junto con la Ec. (4.2), es posible mostrar que un paquete de ondas con frecuencia central f_C penetra en el sistema hasta la celda n según la relación:

$$n = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_C}{f_0} - 1 \right), \quad (4.7)$$

donde $f_0 = \frac{c}{2\ell_0}$ y $j = 1$, corresponden a la segunda banda en la gráfica de la Fig. 4.2. En la ecuación anterior se supone que $f_C \approx f_n = \frac{c}{2\ell_n}$. Esto da la penetración del paquete de ondas. En esta posición será completamente resonante y, para frecuencias más altas, estará completamente reflejada y comenzará a oscilar con un período Bloch determinado por la ecuación (4.6). Como se ha explicado anteriormente, la estructura es demasiado pequeña y el campo efectivo representado por el parámetro γ es muy pequeño, manteniendo únicamente las oscilaciones del arcoíris del paquete de ondas dentro de la región estructurada de la barra. Las longitudes de penetración predichas por la ecuación (4.7) están marcadas por flechas en la Fig. 4.16, mostrando un buen acuerdo con la observación experimental en vista del modelo tan simple empleado en su derivación.

Capítulo 5

Transporte ondulatorio a través de billares caóticos con simetría de reflexión

El objetivo principal de este capítulo es el estudio de las fluctuaciones de la transmisión a través de dos cavidades bidimensionales. Esto nos llevará a comprobar las propiedades de la universalidad de las fluctuaciones de la transmisión que corresponde a un sistema con simetría de reflexión especular comparando los resultados experimentales con los modelos teóricos. En este capítulo se introducen las herramientas para analizar las fluctuaciones de la transmisión. Las universalidades pertinentes a estos casos son explicadas, en resumen, en la sección 5.1 para los casos de uno y dos modos de transmisión, mientras que un análisis teórico más detallado de estos modos de transmisión y de las propiedades de la matriz de dispersión, se dan en los apéndices B y C, respectivamente. Antes de realizar los experimentos es necesario diseñar y construir, en placas de aluminio, las dos cavidades caóticas, detalles conceptuales previos se presentan en la sección 5.2, y el tipo de cavidades junto con algunas especificaciones son tratados en la sección 5.3. El montaje experimental de cavidades e instrumentos se explicó en la sección 2.1, concretamente en la Figura 2.2, mientras que la técnica experimental desarrollada para producir el transporte de ondas a través del billar para su análisis posterior se dan en la sección 5.4. En la sección 5.5 y 5.6, se analizan los datos y se dan los resultados. En la última sección, se justifica experimentalmente el efecto de la absorción en las fluctuaciones de la transmisión.

5.1 Universalidad de las fluctuaciones de la transmisión

Al enviar una onda hacia una cavidad se sabe que parte de la onda se refleja, parte se disipa y parte se transmite. Experimentalmente hablando no es posible aun medir la reflexión y la disipación con el medio circundante. El método experimental ARS nos hace posible medir la transmisión observando la amplitud de la onda como función de la

frecuencia y la fase. Debido al caos, existen fluctuaciones importantes en esta cantidad al realizar un mismo experimento en repetidas ocasiones, mientras que en un medio que no exhibe caos, se tiene un patrón único y repetible. Por lo tanto, sólo se puede realizar un análisis estadístico sobre la amplitud de la transmisión. Esta amplitud de la transmisión, estudiada en su distribución estadística, debe seguir una curva teórica que ya ha sido probada usando otro tipo de sistemas y de ondas, es decir, la transmisión en cavidades caóticas solo depende de su simetría. Por ello se dice que ésta es una propiedad universal.

Un material tiene diversas propiedades ya sean físicas, mecánicas, químicas, entre muchas otras, a partir de las cuales puede ser caracterizado de manera única. Así por ejemplo, al cambiar un metal por otro, con las mismas dimensiones y geometrías, el módulo de Young cambia por que el material es más o menos flexible además, por supuesto, de su estructura atómica. En ese mismo sentido es natural pensar que al estudiar la transmisión ondulatoria, ésta es una propiedad que caracteriza a los sistemas en los diferentes tipos de cavidades caóticas, no tendrían por que tener un carácter general que involucre a todas debido a que los tamaños, el tipo de onda e incluso la geometría, suelen ser completamente distintos. Sin embargo comprueba que las fluctuaciones de la transmisión ondulatoria sólo dependen de que el sistema sea caótico, y en particular que tenga una simetría de reflexión especular.

En trabajos recientes [3] se ha mostrado la universalidad correspondiente para cavidades elásticas sin simetría. De esta forma se está comprobando que las fluctuaciones de la transmisión ondulatoria son universales y no tienen dependencia del tamaño, el tipo de onda e incluso la geometría, y sólo dependen de que el sistema sea caótico, de cuantos modos de transmisión contribuyen a la transmisión (sección 5.2) y, en nuestro caso de que exista simetría de reflexión especular.

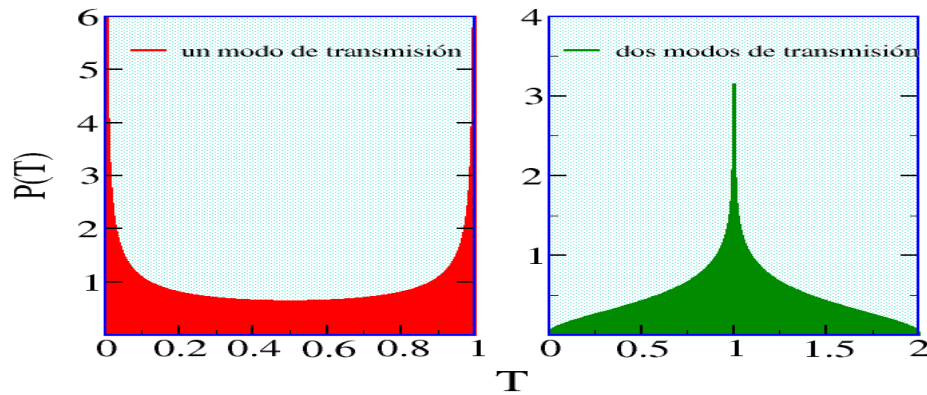


Figura 5.1: Curvas teóricas de las estadísticas esperadas, cabe notar que ambas tienen simetría con respecto al promedio de T .

La conductancia, de acuerdo a la formula de Landauer-Büttiker, es proporcional a la transmitancia $T = \text{tr}|tt^\dagger|$. Para el caso de los sistemas caóticos con simetría de reflexión,

la transmitancia es proporcional a $T = |t|^2$ donde la amplitud de transmisión t es medida directamente de los experimentos realizados. Usando la teoría de matrices aleatorias [77, 78, 79] se ha encontrado que la probabilidad de T es [80, 81]

$$P(T) = \frac{1}{\pi\sqrt{T(1-T)}}; \quad 0 \leq T \leq 1, \quad (5.1)$$

para un modo de transmisión a través de cavidades caóticas con simetría especular, mientras que, para dos modos de transmisión abiertos se tiene

$$P(T) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{T(2-T)}}{|1-T|}; \quad 0 \leq T \leq 2. \quad (5.2)$$

Como es de esperarse ambas estadísticas son simétricas debido a la simetría de las cavidades. Además para el caso de un canal se tiene una divergencia en $T = 0$ debido a la localización débil y un pico en $T = 1$ que viene de la simetría de espejo. Para dos modos de transmisión el pico en $T = 1$ también aparece (ver 5.1).

5.2 Modos de transmisión mecánica a través de guías de onda elásticas

A continuación se muestran algunos conceptos necesarios para la construcción de las cavidades.

Con la finalidad de probar la universalidad del transporte mecánico a través de la cavidad elástica caótica, se construyen dos guías de onda acopladas al billar. La finalidad de la primer guía es la de enviar ondas mecánicas propagantes fuera del plano (ver sección 2.4) hacia la cavidad, ésta actúa como un blanco dispersor. En la segunda guía se llevan a cabo las mediciones de la transmisión de la vibración a través de la cavidad. El necesario que ambas guías de onda eviten la transmisión directa, es decir, que la onda generada en la primera guía no se transmita directamente, o parte de ésta, a la segunda, sin interactuar con la cavidad (Figura 5.3).

Las vibraciones enviadas a la cavidad sufren múltiples reflexiones con las fronteras de ésta, se fraccionan en otras y, debido a que hay dos conexiones con el exterior, las ondas dispersadas salen por ambas guías. Aquellas ondas que salen por la misma guía por la cual han entrado sufrirán un proceso de dispersión de reflexión. La transmisión, por tanto es aquella fracción de la vibración que sale de la cavidad por la otra guía. Debido a la complejidad experimental para poder medir con certeza la reflexión, con los EMATs, únicamente se analiza la transmisión, la cual es medida en diferentes posiciones a lo ancho de la segunda guía y exitando en diferentes posiciones de excitación a lo ancho de la primer guía.

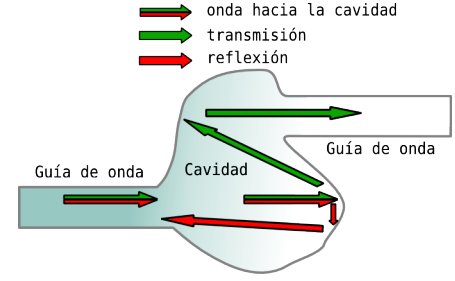


Figura 5.3: Transporte de ondas a través de una cavidad, en el régimen de rayos.

Los sistemas elásticos construidos con las geometrías del Capítulo 2, pueden ser estudiados por dos vías, o bien tenemos un sistema cerrado o se tiene un sistema abierto. Si las vibraciones producidas únicamente se disipan con el medio, existiendo interacción entre las ondas producidas y los rebotes con las fronteras de todo el billar, se dice que el sistema está cerrado. Esto genera resonancias en ciertas frecuencias y se realiza un estudio del espectro acústico resonante con sus correspondientes predicciones teóricas. Mientras que, si fuera posible construir guías de onda de tamaño infinito, una onda viajera no encontraría fronteras en las cuales reflejarse y regresar a la cavidad. Así los únicos en formarse son los modos o canales de transmisión a lo ancho W de la guía de ondas que viajan en dos direcciones, hacia el final de la guía donde son generadas y hacia la cavidad. Como la realización física de una guía de onda infinita no es posible, se construye un mecanismo de amortiguamiento pasivo de las ondas en los extremos de ambas guías, con esto se logra emular un sistema abierto infinito. Un resumen de la descripción teórica de estos canales de dispersión en la teoría clásica de placas se da en el Apéndice B.

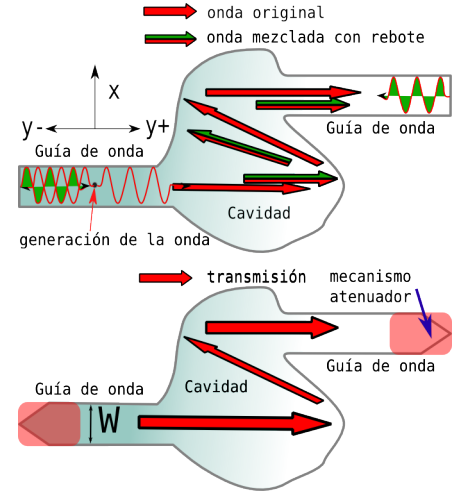


Figura 5.4: Figura superior, sistema cerrado. Inferior, sistema abierto.

5.3 Diseño y fabricación de dos cavidades caóticas elásticas con simetría especular

Dado que se quiere probar la universalidad de las fluctuaciones de la transmisión en cavidades caóticas elásticas con simetría de reflexión, es necesario estudiar sistemas que cumplan con algunas condiciones previas, es decir, se debe asegurar en su dinámica un comportamiento clásico, pero que al evolucionar en el tiempo presenten caos, además de tener una sola simetría de reflexión.

Existen muchos posibles tipos de billares caóticos que pueden ser considerados, como son el billar de Hadamard, el billar de Artín, entre otros. Dentro de esa variedad se seleccionaron solamente dos de ellos, esto con la finalidad de poder comparar las estadísticas finales entre ambos. Las geometrías seleccionadas para su estudio son medio billar de Sinai y medio estadio de Bunimovich. La motivación principal para su elección, es que están ampliamente estudiados en la literatura correspondiente al caos con lo cual es fácil compararlos con resultados sobradamente probados sobre la distribución estadística del transporte. Además son diferentes desde el punto de vista dispersivo ya que, mientras el billar de Sinai presenta reflexiones con las fronteras convexas, el estadio presenta reflexiones cóncavas, con esto se prueba también, que para la universalidad no importa el tipo de fronteras de las cavidades ya sean cóncavas o convexas³. El último criterio, no tan relevante pero si importante, es que dadas sus geometrías son relativamente fáciles de maquinar. A continuación se muestra una breve descripción de las cavidades.

5.3.1 Billar de Sinai

Se denomina billar de Sinai a la región geométrica limitada entre un cuadrado al que se le ha retirado un círculo concéntrico o no. Una dibujo de esta geometría se muestra en la parte superior de la Figura 5.5. Este tipo de billar fue desarrollado por Yákov Sinai de quien toma su nombre. En la parte baja de la Figura 5.5, se muestran las modificaciones hechas al billar original para la fabricación de la cavidad elástica con guías de onda acopladas; se observa únicamente una simetría geométrica de reflexión especular. Se han agregado un par de guías de onda a ambos extremos de la cavidad para el estudio del transporte de ondas flexionales mecánicas.

5.3.2 Estadio de Bunimovich

La región limitada por dos rectas paralelas coronadas, a ambos extremos, por semicírculos de radio a se denomina billar de Bunimovich o más comúnmente estadio. En la parte superior de la Figura 5.6 se observa tal geometría. Este billar fue estudiado primero, y de ahí el nombre, por el matemático Leonid Bunimóvich. En la parte inferior de la misma Figura 5.6, se muestran las modificaciones hechas a dicha geometría para diseñar

³El billar de Artín tiene forma de huevo, es fácil de construir y existen algunos estudios sobre él, pero también presenta reflexiones cóncavas.

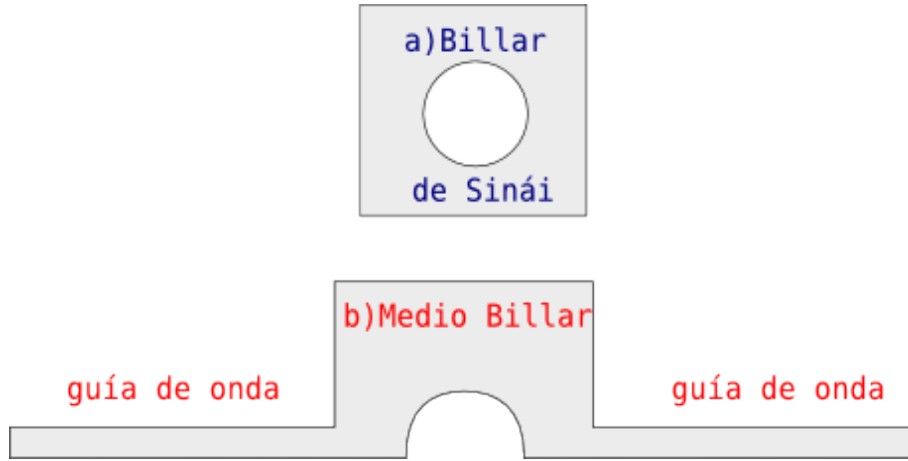


Figura 5.5: (Parte superior) *Billar de Sinai* y *medio billar de Sinai* con dos guías de onda conectadas (parte inferior).

la correspondiente cavidad elástica que se estudia aquí. Se puede ver que también tiene simetría de reflexión especular, además presenta una peculiaridad en sus guías de onda, ya que éstas fueron colocadas con un ángulo de 30° con respecto a la parte inferior del billar de tal forma que, al dispersarse la onda con la frontera, se procura minimizar la transmisión directa.



Figura 5.6: Se muestran, en a) un esquema del estadio de Bunimovich, mientras que en b), se tiene la modificación propuesta con sus guías de onda.

5.4 Procedimiento experimental

La literatura para cavidades caóticas ha sido ampliamente probada en otros sistemas, como son los puntos cuánticos, y en otro intervalo ondulatorio, como son las cavidades de microondas, para el caso de un modo y dos modos de transmisión abiertos, en los modelos analíticos y numéricos pero escasamente en los experimentos. Los análisis comparativos que se realizan, se llevarán a cabo únicamente con los dos billares antes mencionados. Una vez que se tiene todos los aparatos colocados y con los parámetros experimentales correctos, se muestra ahora la manera de medir para cada modo de transmisión (ver Apéndice B). Para las guías de onda propuestas y ondas fuera del plano, se ha calculado que existe dos modos de transmisión abiertos desde frecuencia cero [3], uno torsional y el otro flexional. El modo torsional tiene un nodo en el centro, mientras que el primer flexional no tiene (ver Figura 5.7). Se usará este hecho para estudiar el caso de un solo modo de transmisión, excitando y detectando en el centro de ambas guías. Mientras que, para el caso de dos modos, se excita y detecta en las orillas.

Primeros modos de transmisión abiertos en la guía de onda elástica

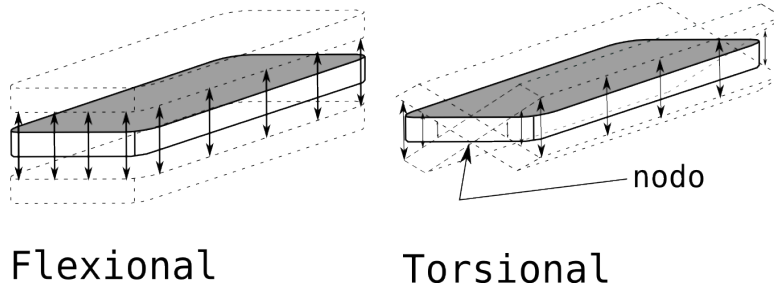


Figura 5.7: En la figura se muestra una sección de la guía de ondas donde las líneas punteadas y las flechas indican la forma en la cual los dos primeros modos de transmisión vibran. Ambos comienzan a transmitir a frecuencia cero. Cabe notar que sólo el modo torsional tiene un nodo lo que será de utilidad para los experimentos de un canal de transmisión.

Se van a realizar cinco experimentos. En el primero, para ambas cavidades, se coloca un excitador de ondas flexionales a 45 cm de la cavidad en el centro de la guía, como se ve en la configuración 1 de la Figura 5.8. En la misma posición es colocado el detector sobre la otra guía. Esta configuración nos mostrara sólo la contribución del primer modo flexional pero no la del torsional abajo de $f = 3400 \text{ Hz}$, debido a que excitamos y detectamos en el nodo del torsional. Se designa a esta forma de colocar los transductores, como la configuración 1 (ver Figura 5.8).

Las medidas de experimentos posteriores se realizaron para la transmisión de dos modos abiertos abajo de $f = 3400 \text{ Hz}$, en este caso, la máxima amplitud de vibración para ambos modos se espera en las orillas de las guías por lo que, ahora los transductores

se pueden colocar en cuatro configuraciones diferentes. La distancia con respecto a la cavidad sigue siendo 45 cm. Se espera que estas cuatro configuraciones muestren el mismo comportamiento de la transmisión. A cada configuración particular se le ha asignado un número, así a cada resultado experimental le corresponde una configuración particular de los transductores, como se indica en la Figura 5.8.

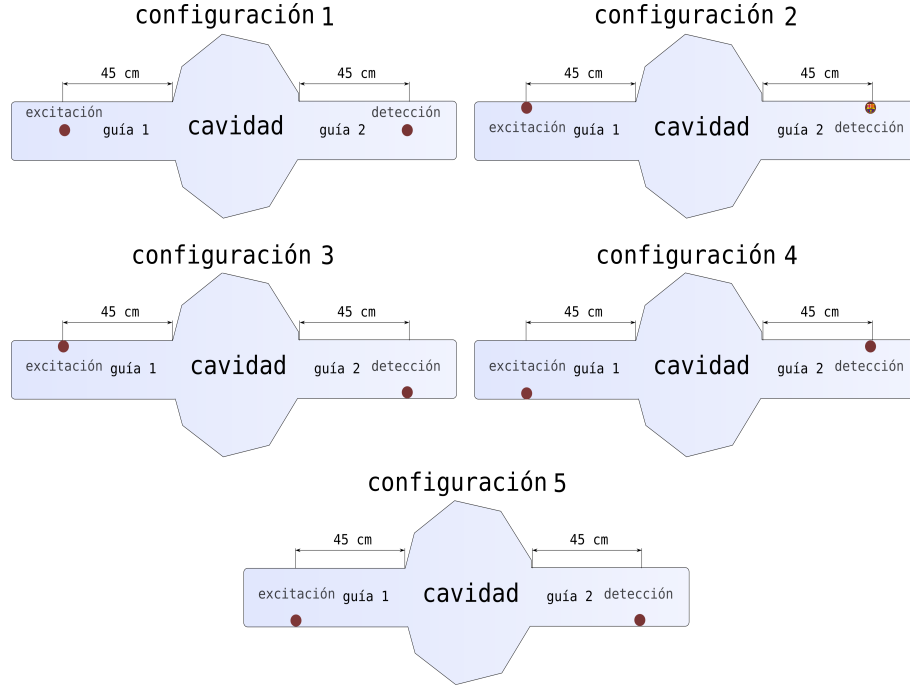


Figura 5.8: Las cinco diferentes configuraciones de los transductores para los experimentos de medición de la transmisión elástica. Con la configuración 1 se mide la contribución de un solo modo de transmisión abierto, mientras que con las configuraciones 2 a la 5 se mide la contribución de dos modos de transmisión abiertos el flexional y el torsional. Para frecuencias $f < 3400 \text{ Hz}$.

5.4.1 Cavidades elásticas (dimensiones y detalles)

Las cavidades se construyen a partir de placas rectangulares de aluminio 1100, con dimensiones $1250 \text{ mm} \times 3050 \text{ mm}$ de ancho y largo, cuyo grosor es de $1/4$ de pulgada. Este aluminio es seleccionado por ser el más comercial y ha mostrado excelentes resultados en trabajos anteriores [3, 62, 84]. Estas planchas se maquinan con las dimensiones de los diseños de las Figuras 5.9 y 5.10 usando el corte por chorro de agua con arena (*sandblast*). Este es un procedimiento de corte en frío con lo que se evita calentar las fronteras del sistema y por ende, la existencia de un cambio en la estructura interna del material en dicha región.

Para abrir el sistema (ver capítulos 2 y 4), al final de cada guía se realiza un corte en forma de cuña formando un triángulo isósceles, sobre éste se coloca un material que atenúa y absorbe las vibraciones (ver Figura 2.6 b).

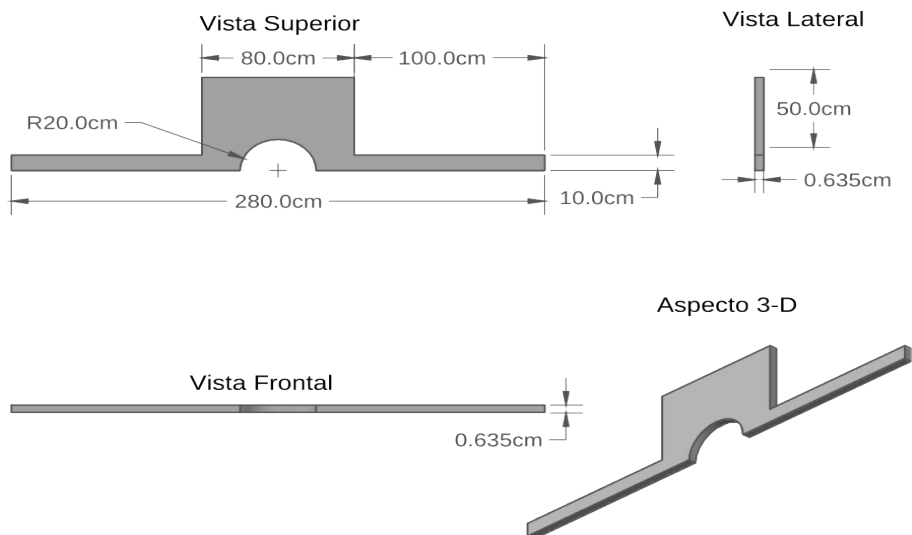


Figura 5.9: *Diseño con dimensiones reales de la cavidad elástica de medio billar de Sinai.*

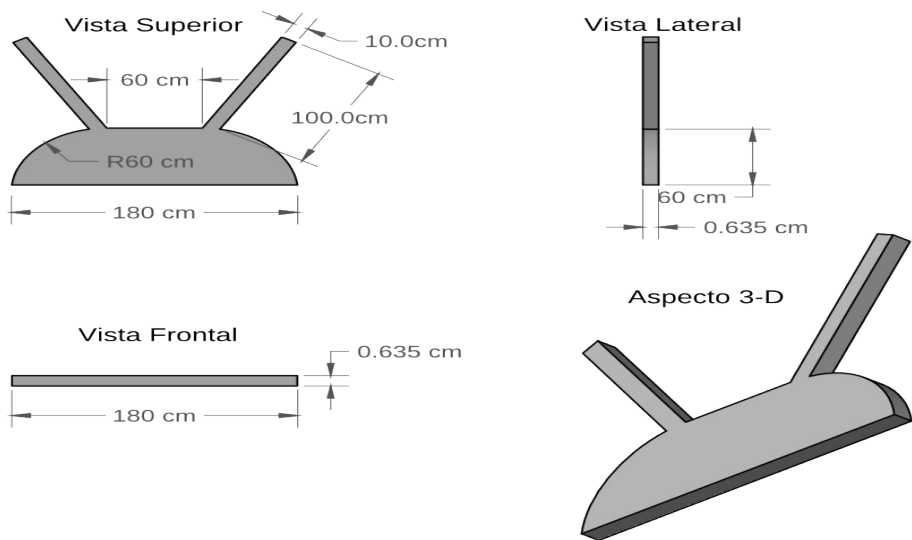


Figura 5.10: *Diseño con dimensiones reales de la cavidad elástica de medio billar estadio.*

5.5 Medio billar de Sinai

En esta sección se presentan los resultados experimentales obtenidos de las propiedades elásticas de la transmisión en una de las dos cavidades fabricadas por separado, usando las configuraciones propuestas en la Figura 5.8 de la sección anterior. En cada realización primero se muestra el espectro experimental obtenido en una gráfica de transmisión como función de la frecuencia, en el rango de 250 a 4000 Hertz⁴ ya que al aumentar la frecuencia un nuevo canal de transmisión comienza a abrir. De los mismos datos se hacen los histogramas contando la cantidad de veces que sucede un evento a cierta amplitud de la transmisión elástica. En las gráficas de la amplitud como función de la frecuencia (ver Figura 5.11) es importante considerar el intervalo de frecuencias apropiado para hacer los histogramas, debido a que existe una transición en la transmisión entre un canal y el siguiente. Como puede verse en la misma figura, la amplitud disminuye al ir aumentando la frecuencia. Por ende es necesario dividir el eje de frecuencias en intervalos para elaborar los histogramas. Con los datos de la primera configuración de los transductores se hicieron estadísticas con ventanas de 100, 200 y 500 Hertz, para identificar las diferentes zonas de transición. Una vez seleccionado el intervalo de frecuencias apropiado una región adecuada de estudio, se realiza un promedio de los diferentes histogramas en dicho intervalo. De esta forma se reducen los ruidos y se consigue una mejor estadística. Finalmente, se comparó con la curva de los modelos teóricos existentes y así mismo con los resultados entre ambas cavidades. Con ello se demuestra la universalidad propia de estos sistemas, para 1 y 2 modos de transmisión.

Para las configuraciones experimentales 3, 4 y 5 sólo se muestra el resultado del histograma promediado comparando con la curva teórica correspondiente.

5.5.1 Transmisión para un modo abierto

En el primer antecedente experimental [62] se demostró, usando la técnica ARS, que a pesar de tener dos modos transmitiendo desde frecuencia cero, es posible encontrar únicamente la contribución experimental del primer modo flexional abajo de $f = 3400 \text{ Hz}$, usando el argumento de la Sección 5.4.

5.5.2 Resultados configuración 1

En el primer experimento se pretende omitir la contribución a la transmisión del modo torsional, y obtener datos experimentales sólo del canal de transmisión flexional. La frecuencia inicial corre desde 250 Hertz y termina hasta 4000 Hertz, el espectro total se muestra en la gráfica de la Figura 5.11.

⁴No es posible medir desde la frecuencia de 0 Hertz puesto que los transductores dejan de funcionar debido al calor producido por la corriente que circula en la bobina. Un segundo factor se presenta en el mecanismo de atenuación ya que a frecuencias cercanas a cero no es posible mitigar las ondas y así abrir el sistema debido al tamaño de las amplitudes de las resonancias.

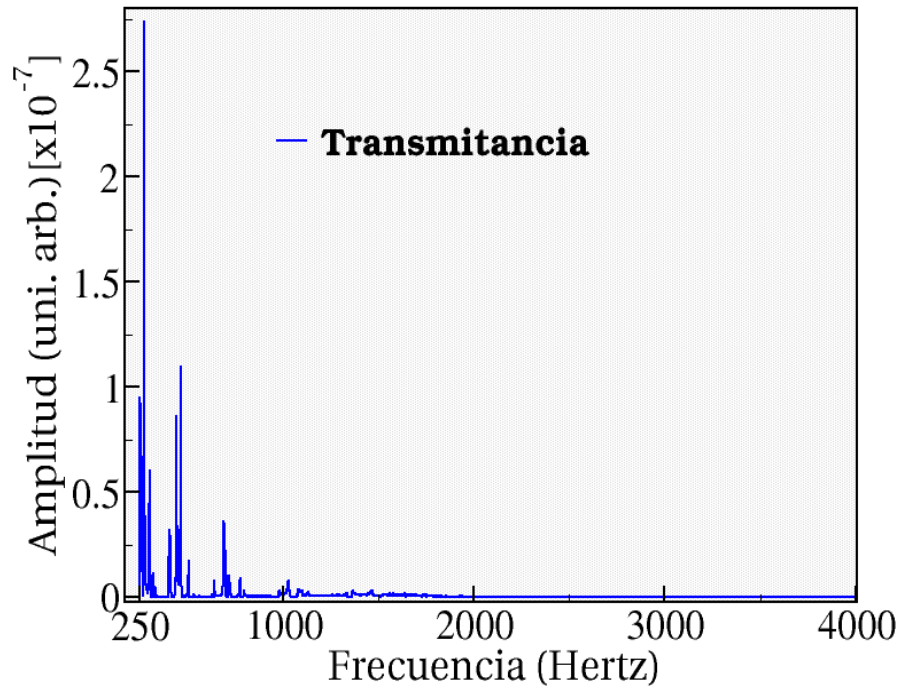


Figura 5.11: *Espectro acústico resonante de medio billar de Sinai con la configuración 1. Note que la amplitud cambia a medida que aumenta la frecuencia.*

De los datos obtenidos con la configuración 1 se realizaron los histogramas de las Figuras 5.13, 5.14 y 5.15, usando ventanas de 100, 200 y 500 Hertz respectivamente. No es posible realizar un histograma abarcando todo el intervalo experimental debido a que existen contribuciones de modos de transmisión que abren a frecuencias mayores. Por otra parte, se observa en las Figuras 5.11 y 5.12 que en el rango de frecuencias estudiado las amplitudes de onda disminuyen aun así la curva de las distribuciones estadísticas debe ser la misma. Para poder descubrir el comportamiento de la transmisión, es necesario dividir todo este rango en ventanas que exhiban la universalidad apropiada.

5.5.3 Histogramas de la transmisión elástica

5.5.3.1 ventanas de 100 Hertz

Se muestran en las Figuras 5.13, 5.14 y 5.15 los histogramas generados a partir de los datos experimentales de la Figura 5.11, tomando ventanas de 100 Hertz en cada intervalo. En ellas es posible observar la transición generada en el transporte por un modo y poco a poco aparece la contribución del segundo modo cuando este abre.

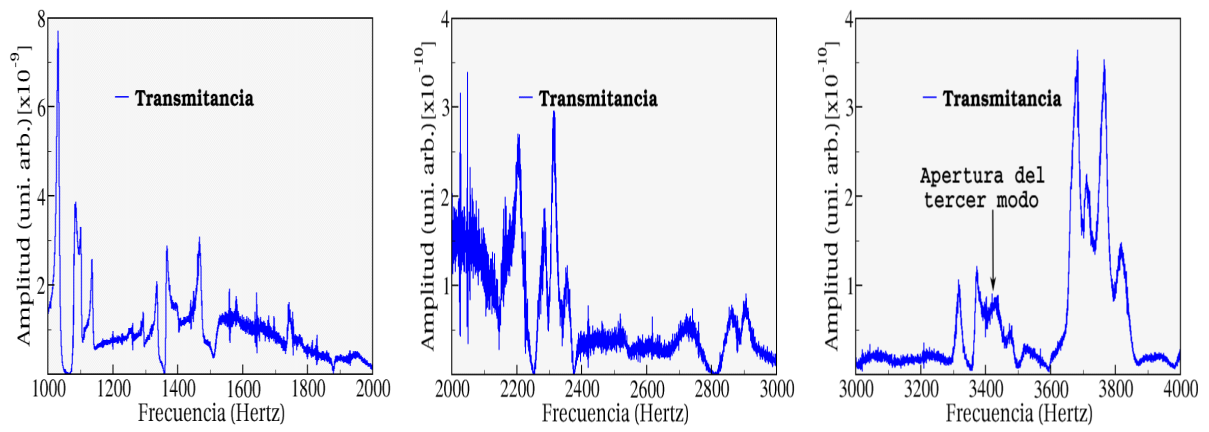


Figura 5.12: Las gráficas muestran tres ampliaciones en intervalos de 1000 Hertz, tomados de la gráfica de la Figura 5.11. En la tercera gráfica, se señala con una flecha, la frecuencia calculada en la cual en tercer modo comienza a transmitir.

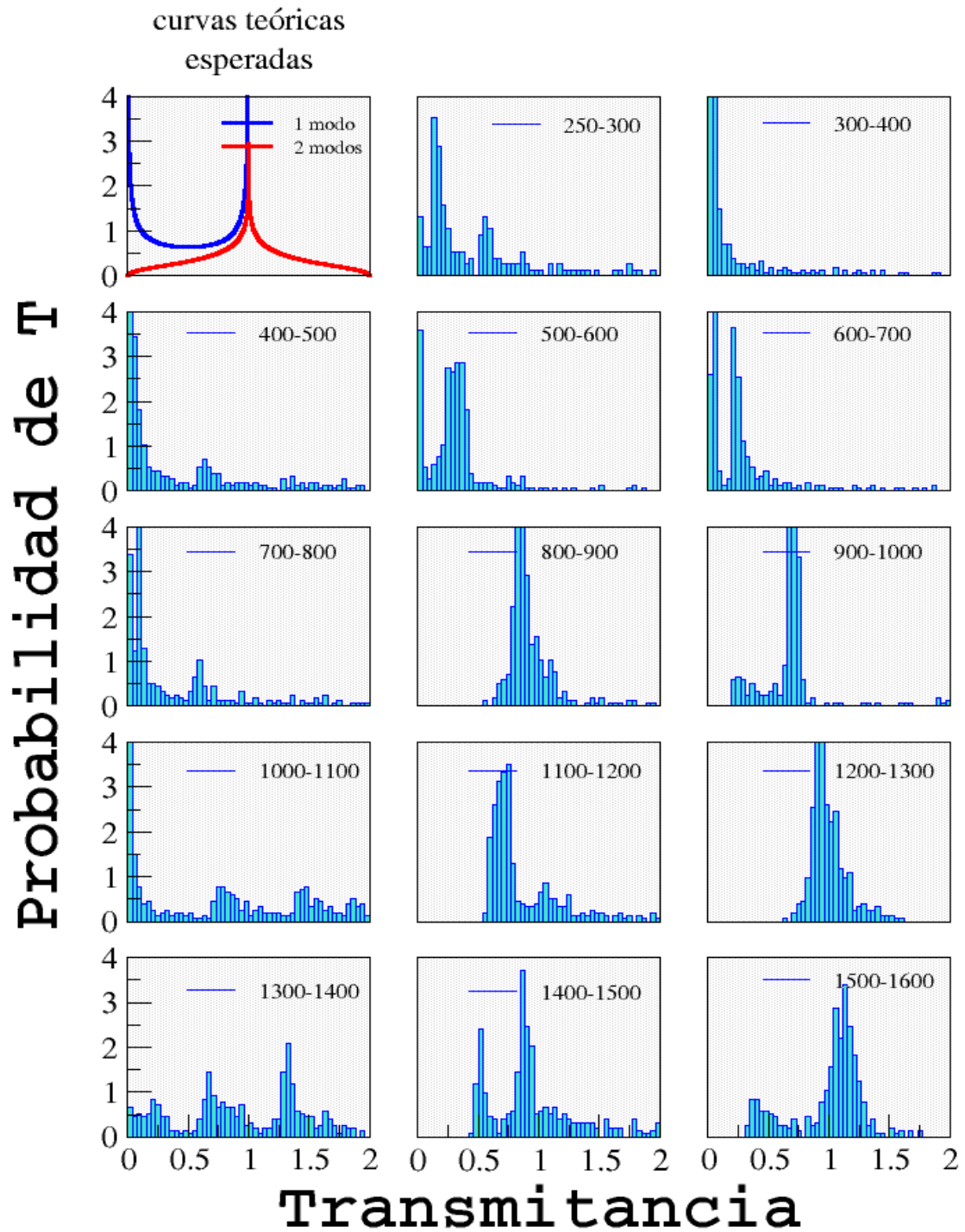


Figura 5.13: la primer gráfica en la esquina superior izquierda muestra las curvas teóricas esperadas dada por la ecuación 5.1 y la 5.2. Todos los intervalos están dados en Hertz.

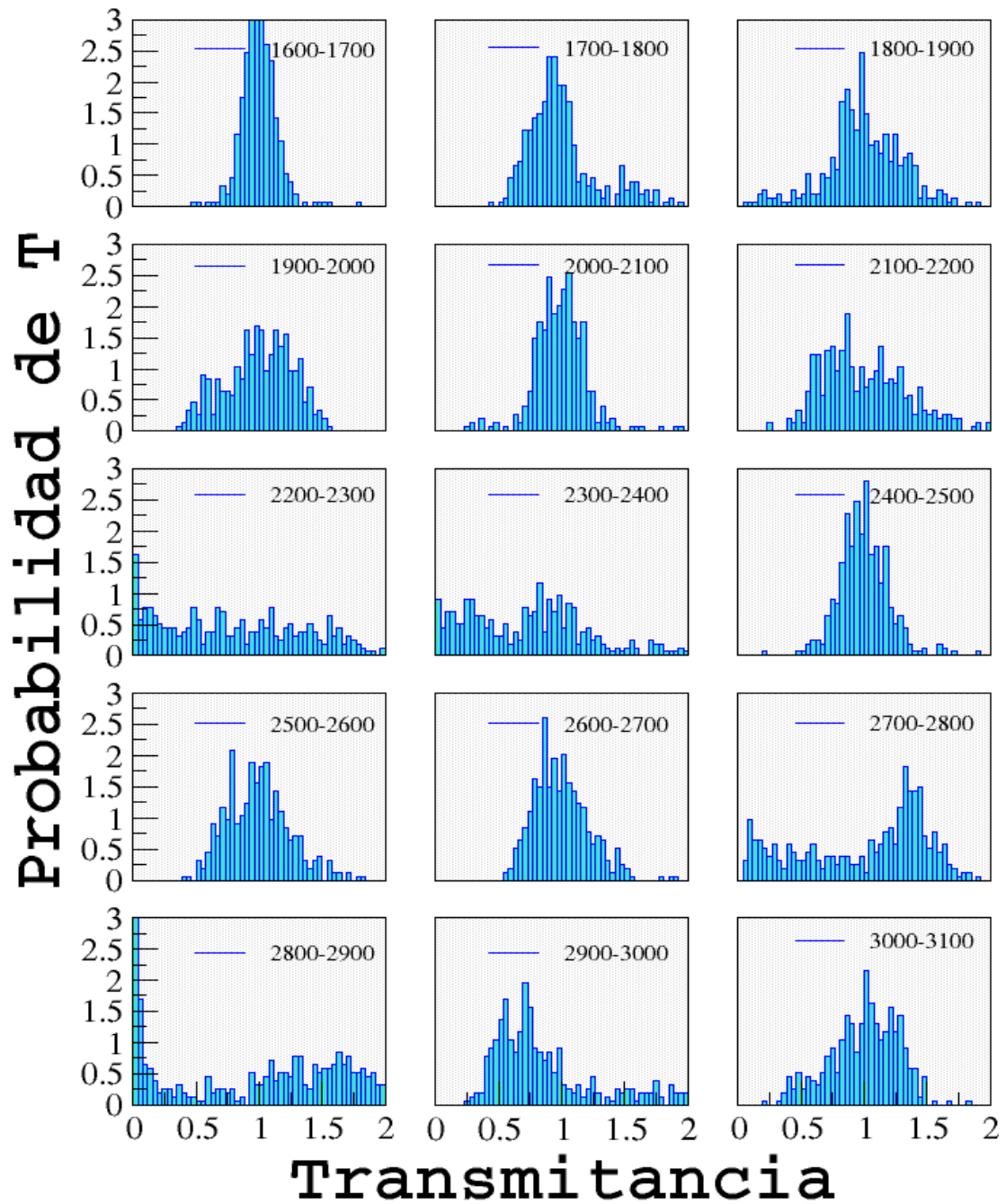


Figura 5.14: En varios de estos histogramas es posible observar una marcada tendencia hacia la curva teórica para dos modos de transmisión abiertos mostrada en la Figura 5.13, desde 1600 a 2500 Hz.

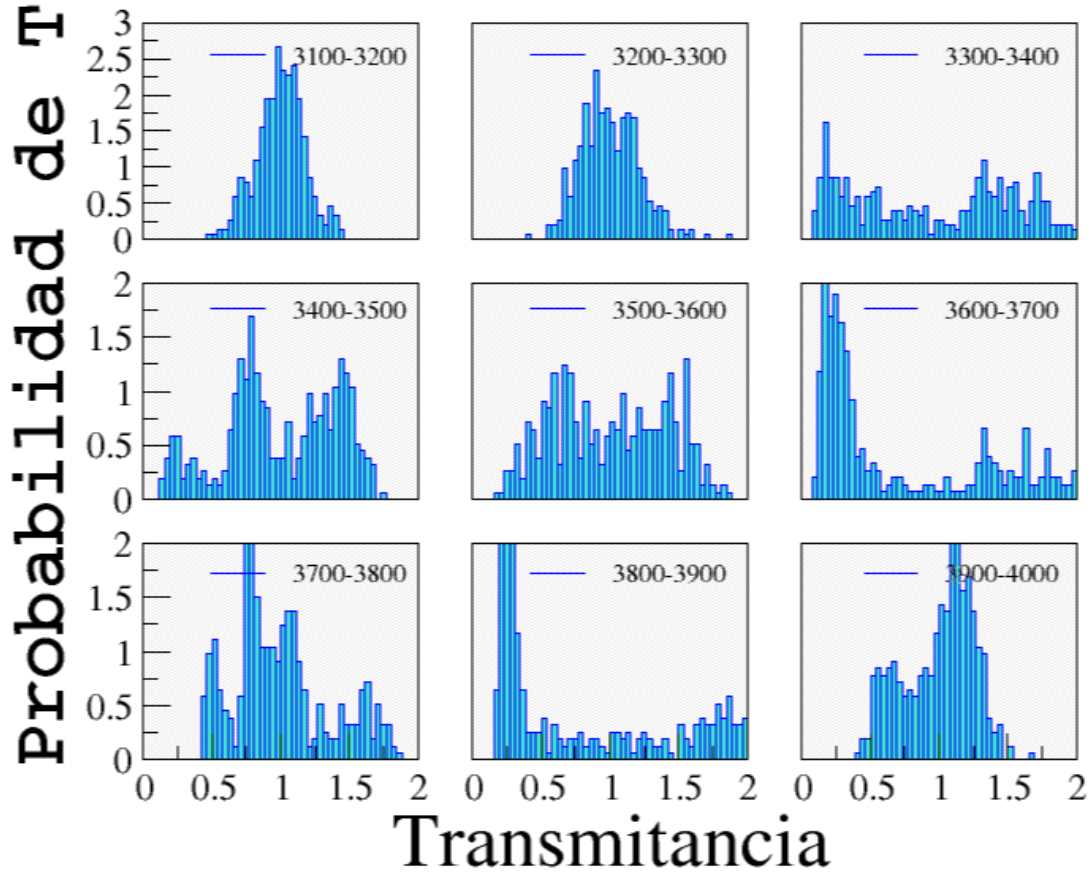


Figura 5.15: Estos histogramas, concretamente los últimos 7, presentan una tendencia muy diferente a las curvas teóricas ya presentadas debido a la presencia de la apertura de un tercer modo de transmisión.

Al inspeccionar las gráficas de las estadísticas para bajas frecuencias en las Figuras 5.13, no es posible observar una tendencia clara que se aproxime a la curva teórica propuesta para un modo de transmisión. Al final de este capítulo se presenta un experimento sobre varios tipos de mecanismos de atenuación de ondas en los extremos finales de ambas guías, el cual demuestra que no se logra abrir por completo el sistema elástico y por ende no se obtuvo en su totalidad la estadística esperada. Las predicciones de por la ecuación (5.1) muestran que las fluctuaciones de la transmisión deben ser simétricas en su densidad de probabilidad, es decir, debe haber la misma cantidad de datos transmitiendo con muy poca amplitud y con alta amplitud. En los experimentos realizados, el pico de alta amplitud de transmisión, el cual aparecería a la izquierda de la gráfica, no se presenta. Las mejores aproximaciones se muestran en la Figura 5.16 donde se observa un ligero incremento en las amplitudes de las transmisiones altas y que la diferencia notablemente de la predicción teórica para cavidades caóticas simétricas con curva teórica $P(T) = 1/2\sqrt{T}$.

Al analizarla la gráfica de la figura antes mencionada, se puede afirmar que mientras más pequeño el intervalo de frecuencia tomado para hacer las estadísticas, se ajusta mejor la parte de la izquierda. Por otra parte al aumentar la cantidad de datos, o al tomar un mayor rango de frecuencia, en la estadística, ahora la parte derecha comienza a ajustarse mejor.

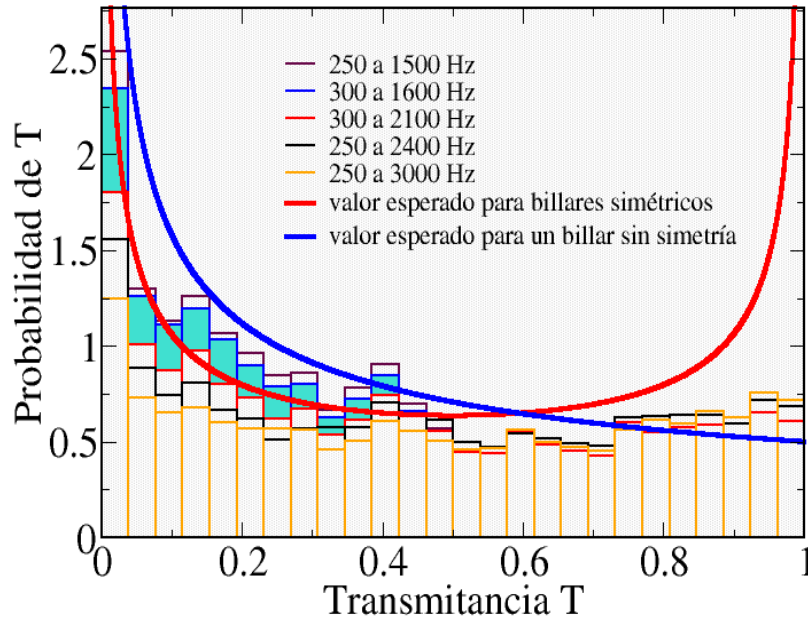


Figura 5.16: Barras estadísticas realizadas con los datos de la Figura 5.11 para cinco intervalos de frecuencia diferentes, las curva teórica esperada para el billar simétrico confirma la predicción. Se ha resaltado la que se considera como mejor aproximación sombreandola con un tono diferente.

Es posible observar en los histogramas que en general, hay una la tendencia a mostrar únicamente la contribución de un modo abierto, hasta tener histogramas con la forma de la curva teórica para los dos modos transmitiendo, lo cual sucede al ir variando el intervalo de frecuencias de las ventanas poco a poco a frecuencia $f = 3400 \text{ Hz}$. Cabe recordar que ambos transductores se colocan al centro de las guías de onda, en el nodo del modo torsional, con la finalidad de evitar su contribución a la transmisión. Así, la predicción estadística de dos modos abiertos debería presentarse cuando se abre el tercer modo, sin embargo, el histograma obtenido se puede ver bien ajustado con respecto al experimento a frecuencias por debajo de la apertura de éste. Además (ver Figura 5.17), presenta la particularidad de no tener un adecuado ajuste en su centro debido a que el ancho de las ventanas consideradas son de 100 Hertz. Esto ocasiona que tienda a una

curva Gaussiana, símbolo inequívoco de la presencia de ruido significativo.

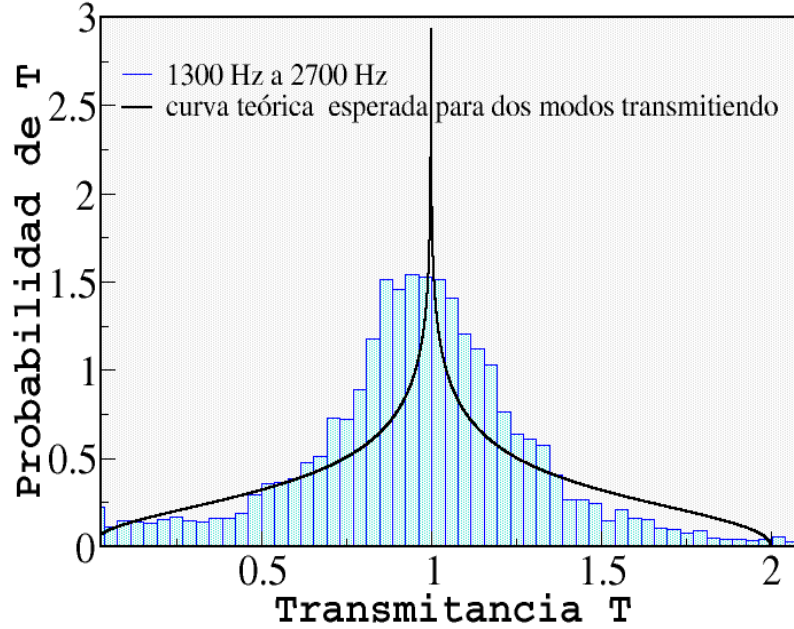


Figura 5.17: Curva de valor esperado e histograma relacionados a dos modos de transmisión, generada con los datos de la Figura 5.11 y la configuración Excitación-Detección 1. Se observa que la distribución de probabilidad se acerca más a una curva gaussiana debido a que en el intervalo estudiado el ruido supera a la amplitud de transmisión. Se coloca la curva teórica para dos modos de transmisión sólo por comparación, dado que la configuración experimental 1, se usa para obtener únicamente la distribución estadística para un modo de transmisión.

5.5.3.2 ventanas de 200 Hertz

En las figuras 5.18 y 5.19 se dan los histogramas correspondientes a ventanas de 200 Hz. Como puede verse la transición de 1 a 2 modos abiertos también sucede en estos histogramas lo que apoya nuestras conclusiones anteriores para ventanas de 100 Hz, en relación a que no es posible tomar un gran intervalo de frecuencias para elaborar los histogramas.

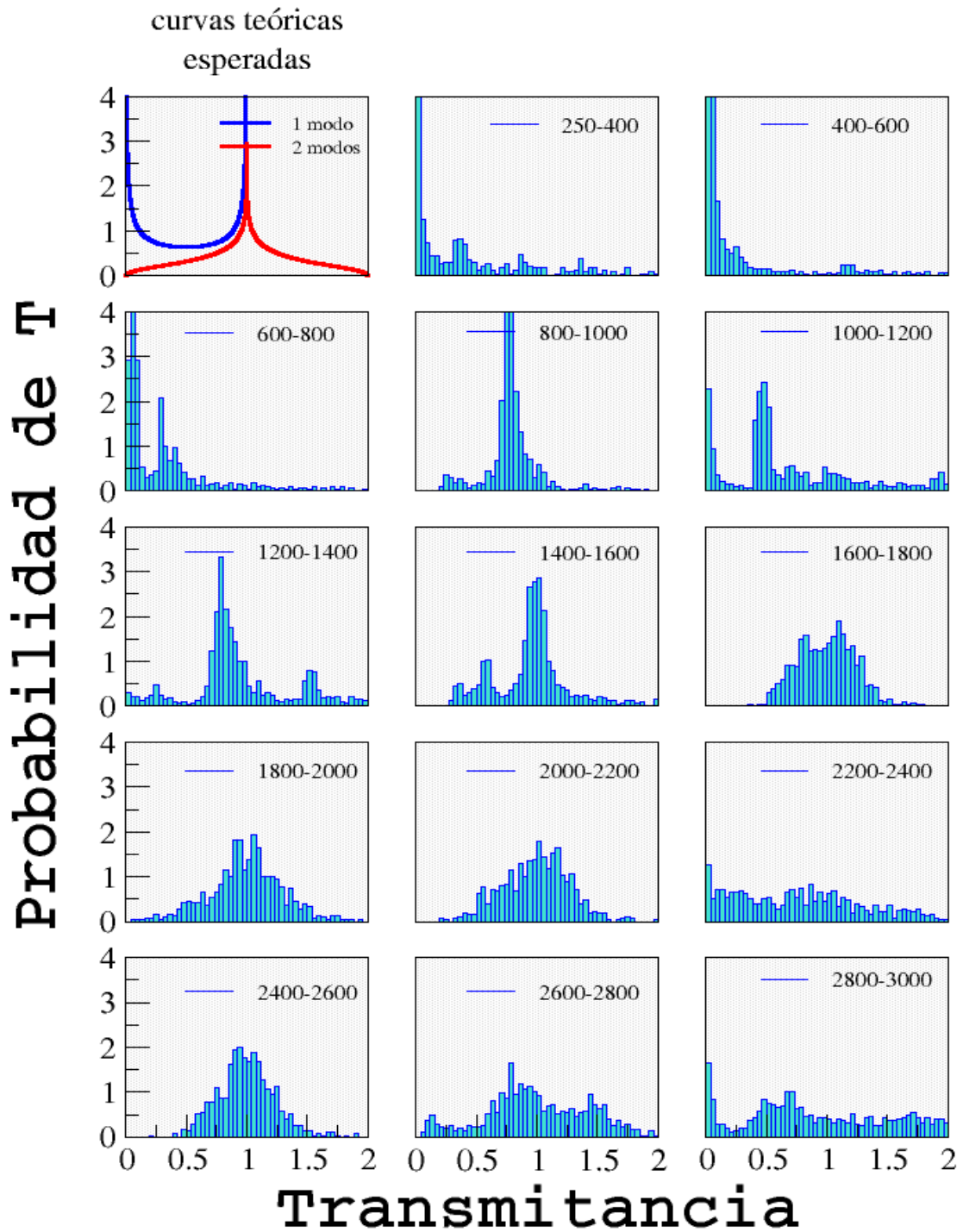


Figura 5.18: Histogramas tomando rangos de frecuencia de 200 Hertz. Desde el 600 Hz hasta 2200 Hz, se observa claramente la tendencia hacia la curva teórica para dos modos de transmisión abiertos.

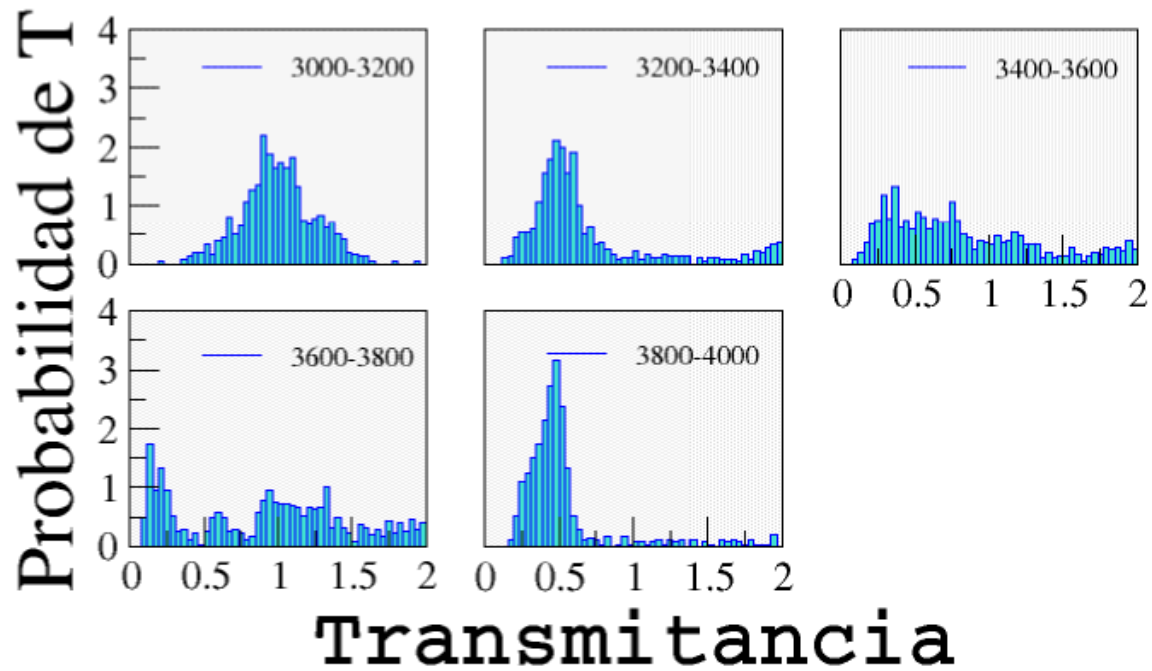


Figura 5.19: Debido a la apertura de un tercer modo la estadística es diferente a la predicha para dos canales.

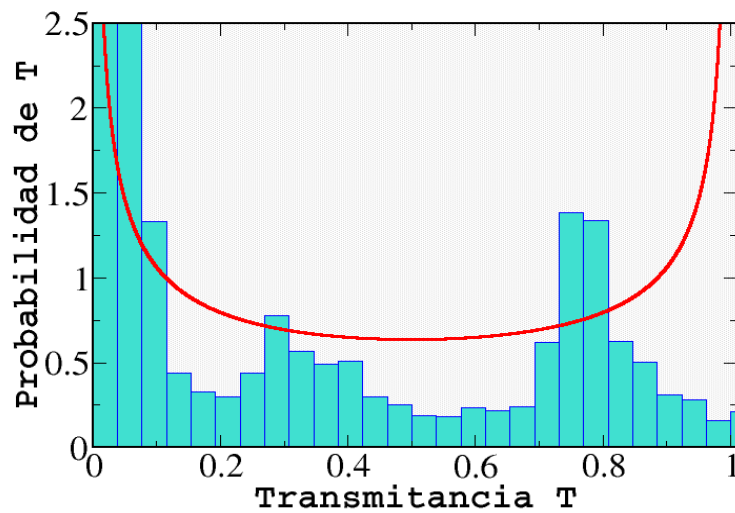


Figura 5.20: El histograma comienza a la frecuencia 250 Hz y termina en 1 kHz.

Al ampliar las ventanas a 200 Hz se mejora la estadística esperada para un modo de transmisión, lo cual se observa abajo de 0.4 en el eje X de la Figura 5.20, que corresponde a transmisión con baja amplitud.

Por último, en la Figura 5.21, se muestran las estadísticas tomando ventanas de 500 Hertz. Se observa claramente que los valores de las barras no se ajustan a la curva teórica para un solo modo transmitiendo.

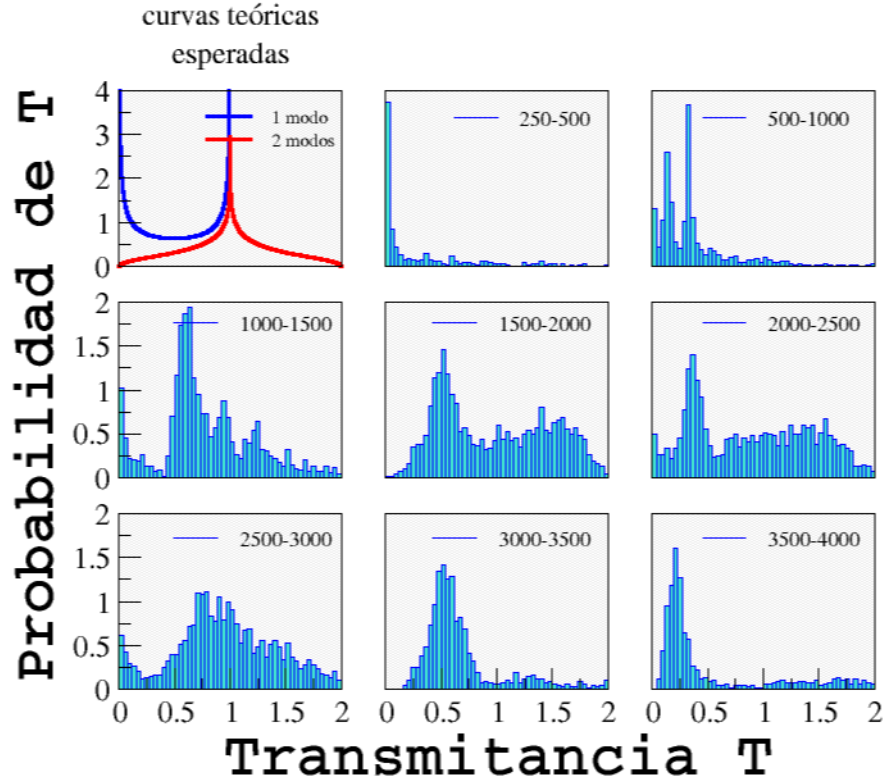


Figura 5.21: Histogramas tomando ventanas de 500 Hertz de frecuencia.

Los tres tipos de intervalos en los histogramas mostrados revelan que no es posible obtener experimentalmente la estadística en la transmisión para un solo modo de transmisión abierto tomando intervalos de frecuencia amplios. Para obtener un mejor distribución estadística (ver Figura 5.16) se toman las ventanas de 100 Hz de intervalo y se realiza un promedio. Esto se hace debido a que posiblemente los dos modos de transmisión están abiertos desde una frecuencia $f = 0$ y, a pesar de llevar a cabo un experimento en donde solo sea deseable la contribución de un modo en la transmisión usando la configuración 1 (ver Figura 5.8), el segundo canal también está contribuyendo aunque con menor peso.

5.5.4 Transmisión para dos modos abiertos

Para obtener la tendencia en la transmisión de dos modos abiertos experimentalmente se emplean las configuraciones 2 a la 5 propuestas en la Figura 5.8 en donde se detectan y excitan ambos modos abiertos desde frecuencia $f = 0$ (Figura 5.7).

5.5.5 Resultados configuración 2

Se presenta en la Figura 5.22 el espectro total de donde se obtendrán los histogramas correspondientes. A partir de aquí únicamente se presentarán los histogramas que se considera muestran los mejores resultados, como los mostrados en la gráfica de la derecha en la misma Figura ⁵.

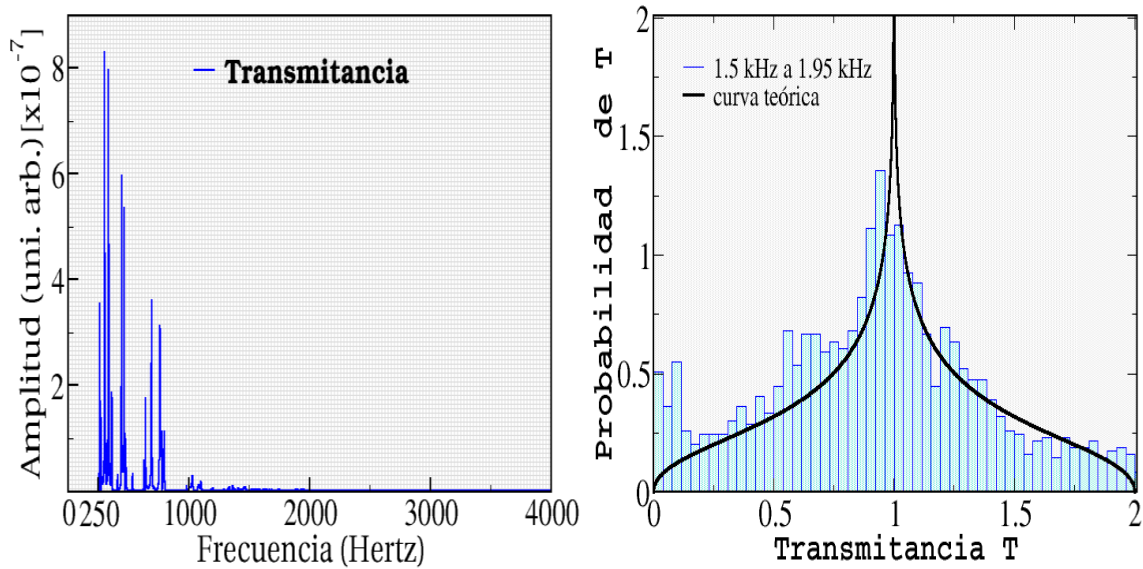


Figura 5.22: La gráfica de la izquierda corresponde a el espectro acústico resonante de medio billar de Sinai con la configuración 2. La gráfica de la derecha muestra la mejor estadística obtenida para dos modos de transmisión, el intervalo de frecuencia analizado pertenece a ventanas de 150 Hertz.

⁵Las estadísticas para la configuración 3 no se presentan por errores experimentales.

5.5.6 Resultados configuración 4

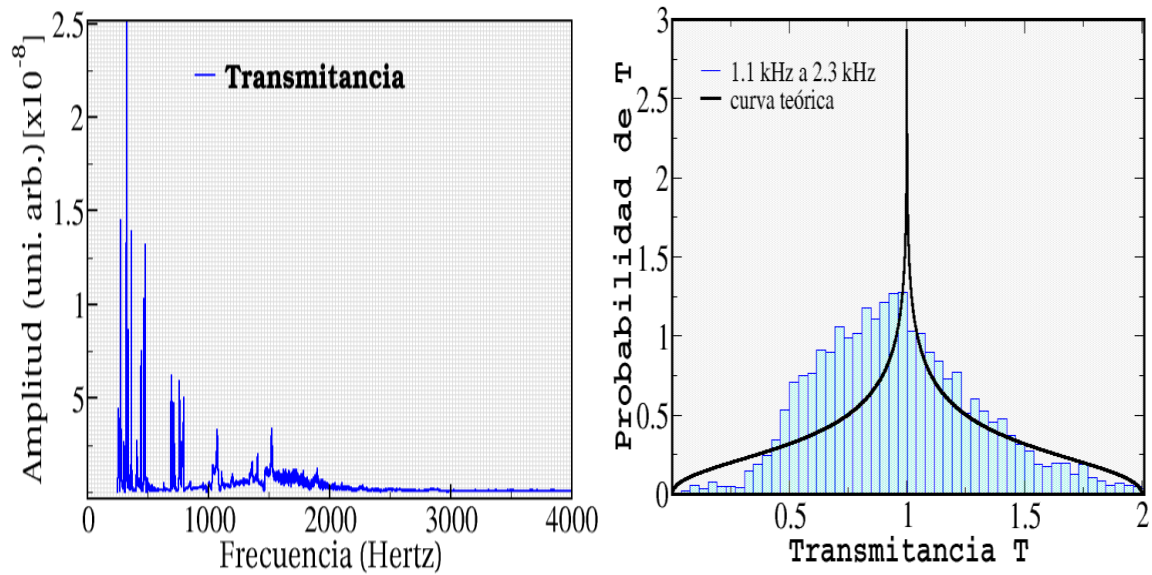


Figura 5.23: Gráficas realizadas al colocar los transductores EMATs en la configuración 4 con ventanas de 300 Hz. En la gráfica de la izquierda se muestra el espectro acústico resonante, mientras que en la derecha se tiene la mejor distribución de probabilidad obtenida y la curva teórica esperada.

5.5.7 Resultados configuración 5

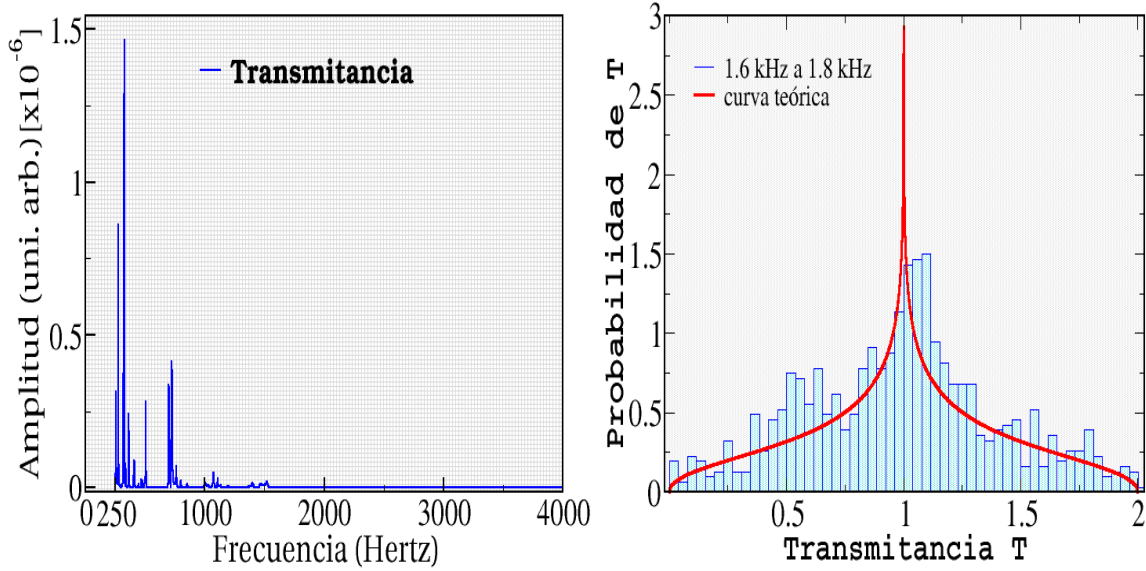


Figura 5.24: En este experimento el mejor histograma generado se da en una pequeña ventana de 200 Hz con un buen acuerdo con respecto a la curva teórica (ecuación 5.2).

En las gráficas mostradas en las Figuras 5.17, 5.22, 5.23, 5.24 es posible observar un comportamiento similar al valor esperado mostrado en la ecuación 5.2 para dos modos de transmisión abiertos. Mientras que para un solo modo los experimentos no se ajustan del todo con la teoría propuesta, lo cual se entiende por que estas configuraciones de transductores EMATs excitan dos modos normales desde frecuencia $f = 0$ y aunque experimentalmente se pretendió disminuir la contribución de uno de ellos en los resultados finales, no es posible eliminarlo en su totalidad.

5.6 Medio estadio de Bunimovich

En esta sección se muestran los resultados para el medio billar Bunimovich, a continuación se presentan los resultados promediados en las ventanas adecuadas que muestran los mejores ajustes con respecto a la teoría predicha. Nuevamente se pretende comparar los resultados experimentales de esta cavidad elástica caótica con los modelos teóricos existentes y además, indirectamente también, comparar con los histogramas anteriores del medio billar de Sinai. Las gráficas muestran los análisis de la misma forma que antes.

5.6.1 Transmisión para un modo

Hemos mencionado que los resultados experimentales no son satisfactorios, en ambas cavidades cuando se desea analizar la transmisión elástica de un modo, la configuración número 1. Sin embargo, en el medio estadio, muestra una mejor aproximación a la curva teórica con respecto a lo que se esperaba dados los resultados anteriores (ver Figura 5.25). Los resultados para las configuraciones 2, 3 y 4, se dan en las figuras 5.26, 5.27 y 5.28, respectivamente. Como puede verse en esas figuras, hay un acuerdo razonable.

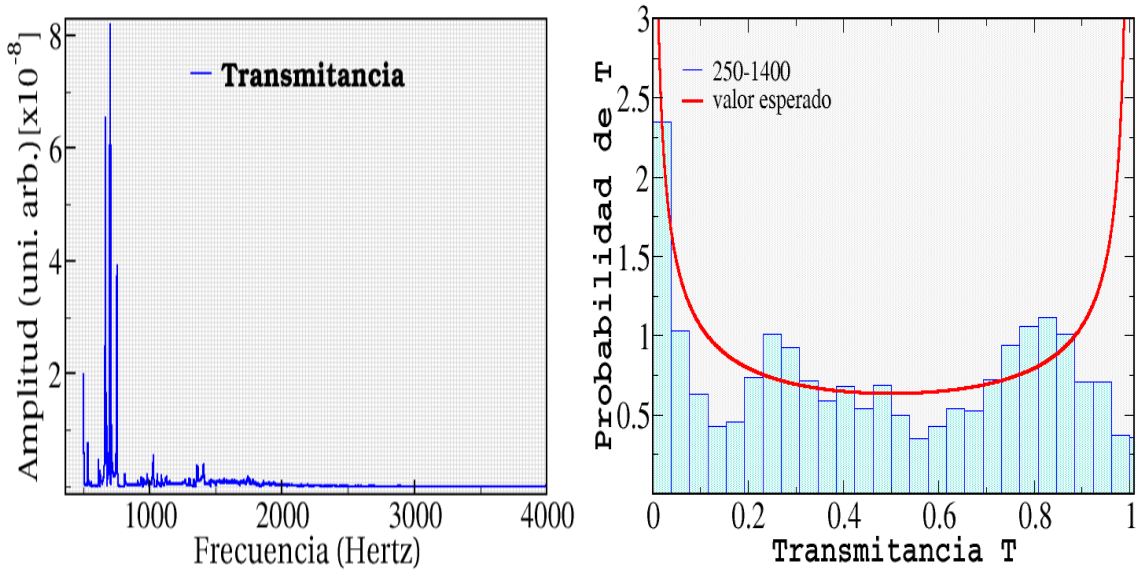


Figura 5.25: En la gráfica de la derecha se tiene el histograma generado a intervalos de de 300 Hz, a partir de su espectro acústico resonante en la gráfica izquierda.

Los resultados para un modo de transmisión abierto presentan un mejor acuerdo con respecto a la curva teórica, que aquellos exhibidos por el billar de Sinai. Esto se puede

ver mas claro en el pico a la derecha, transmisión de amplitud alta, y en la parte media lo cual se ajusta de mejor forma comparado con lo presentado en la Figura 5.16.

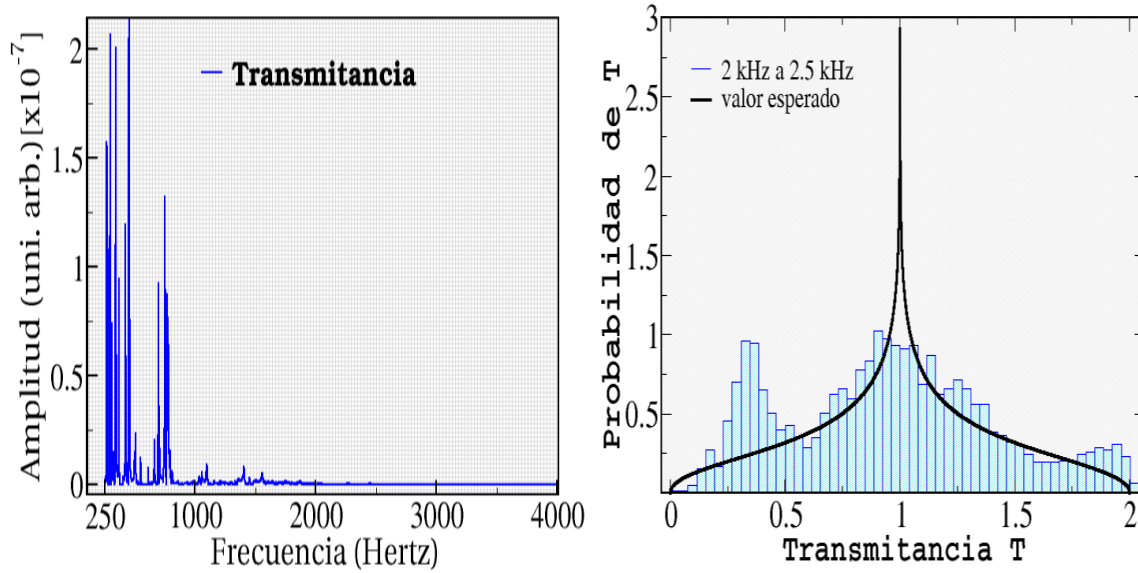


Figura 5.26: El histograma, a la derecha, se ha elaborado tomando una ventana de 500 Hz directamente de los datos experimentales de la gráfica de la izquierda.

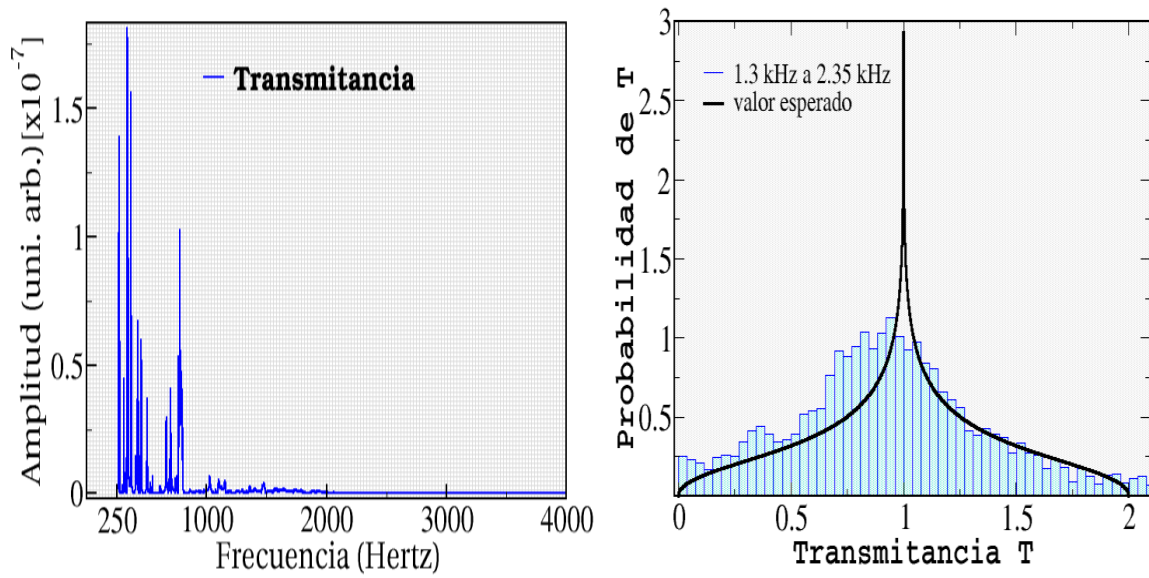


Figura 5.27: Cabe destacar, en la figura de la derecha, el excelente acuerdo entre el experimento y la teoría, desde la parte central hasta el final de la gráfica, las ventanas tienen un ancho de 300 Hz.

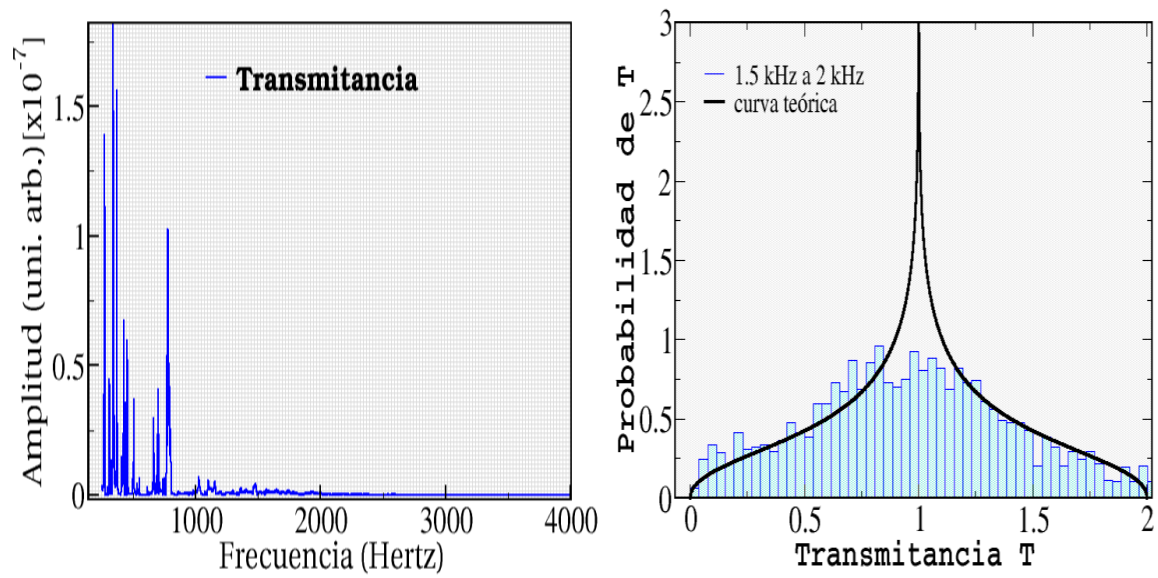


Figura 5.28: *El histograma muestra el mejor acuerdo con respecto a la teoría para una ventana de 500 Hz.*

5.7 Efecto de la absorción en el estudio del transporte elástico

En la sección 5.2 de este capítulo se mencionan algunas consideraciones importantes para llevar a cabo los experimentos propuestos en los billares. Uno de los mas importantes trata sobre los sistemas cerrados y los sistemas abiertos. Con los primeros se estudian patrones estacionarios y muchas propiedades surgidas de estos fenómenos vibratorios, como los mostrados en el capítulo 3. Con los segundos podemos estudiar la evolución temporal de las ondas, tal y como lo presentamos en el capítulo 4, y fenómenos de transporte a través de billares caóticos elásticos.

El problema, en el caso de los sistemas abiertos, radica principalmente en abrir el sistema o dicho de otra forma, provocar que las ondas viajeras no reboten con los extremos de ambas guías de onda y así no regresen a interactuar con el resto del sistema. Como ya se mencionó, se propuso crear un sistema de absorción pasivo que simulara el efecto de tener guías de onda infinitas absorbiendolas en los extremos. En los experimentos se trabajó con diferentes tipos de atenuación y disipación total colocando finalmente la que se considera la mejor forma de atrapar y disipar estas vibraciones espurias. Aún así, en última instancia se concluye que es imposible abrir por completo los sistemas de manera experimental, lo cual se ve reflejado en los resultados vistos en los histogramas.

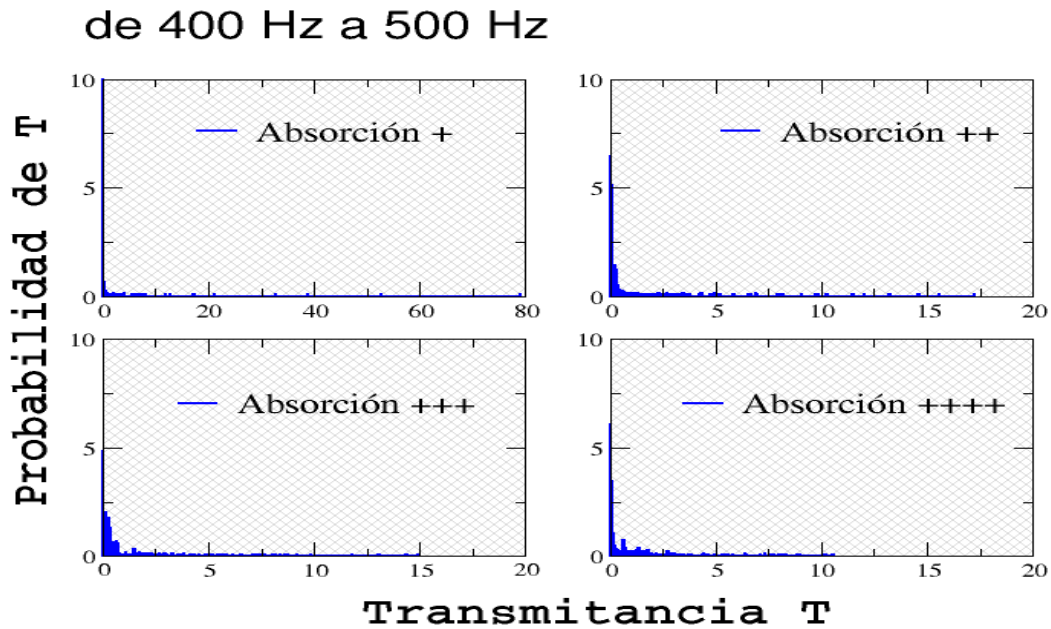


Figura 5.29: La atenuación de la vibración va aumentando de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, indicado por el símbolo +.

Debido a que se realizaron pruebas con 4 dispositivos de atenuación de ondas, se

presentan en las Figuras 5.29 y 5.30 los efectos en la transmitancia de abrir de menor a mayor medida el sistema. Los histogramas de ambas figuras fueron tomados del billar de Sinai excitando y detectando en el centro de cada guía de onda; los datos son de 400 Hz a 500 Hz y la curva roja representa el valor teórico esperado para un canal abierto.

Claramente se puede ver en la Figura 5.29 que al aumentar la atenuación, el último valor de la transmitancia (eje X) va disminuyendo. Al ir abriendo el sistema las resonancias presentes disminuyen de amplitud y aumentan su anchura. Como disminuyen de amplitud el punto más alto de un pico resonante disminuye de amplitud, al realizar un histograma (Figura 5.30) el pico alto se manifestará en un menor número en el eje de las transmitancias (eje horizontal) y la anchura se distribuye a lo largo del histograma.

La Figura 5.30, se muestra un acercamiento en el eje de las transmitancias de 0 a 1, en donde la curva teórica está presente. Se puede ver que al ir aumentando la atenuación de la onda los histogramas experimentales concuerdan más con la curva predicha por la teoría de matrices aleatorias.

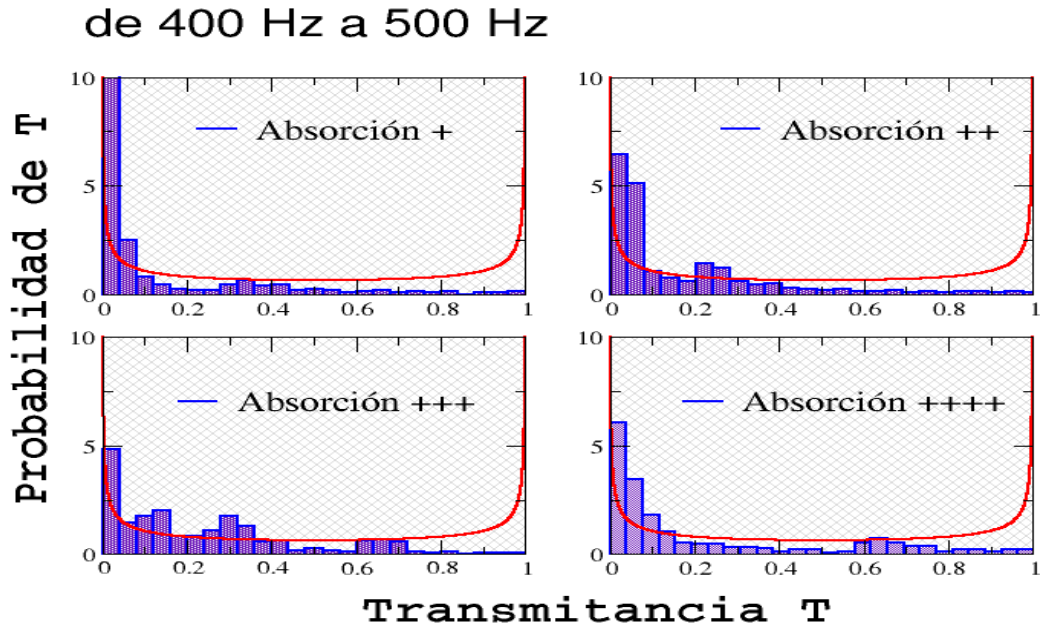


Figura 5.30: Mismas gráficas que las presentadas en la Figura 5.29, con la diferencia de realizar un acercamiento entre cero y uno.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se estudiaron varios problemas sobre vibraciones en sistemas elásticos cerrados y estructurados, de varillas y placas usando espectroscopia acústica resonante sin contacto, con transductores electromagnéticos acústicos y un vibrómetro Doppler. En primer lugar, se midieron las dos polarizaciones de las amplitudes de onda de algunos modos normales dentro del plano en una placa rectangular. En este caso los resultados experimentales tienen un buen acuerdo con las predicciones numéricas. Estas mediciones pueden considerarse como una piedra angular en los estudios experimentales de las vibraciones dentro del plano de placas ya que, hasta hoy, son la única alternativa a la espectroscopia de moteado.

En segundo lugar se midieron, en una barra estructurada, para ondas torsionales, las oscilaciones de Bloch y el atrapamiento de arcoíris y la conexión entre ambos fenómenos para ondas torsionales. Como se mostró, estos fenómenos, aparentemente no relacionados, están fuertemente ligados. Cuando un paquete de ondas se envía hacia la estructura, se observan diferentes fenómenos. Cuando la estructura es localmente periódica el paquete tiene dos comportamientos, dependiendo del valor de la frecuencia central del paquete. Por una parte cuando la frecuencia central está en una banda, parte del paquete puede atravesar completamente la estructura como es de esperarse en sistemas periódicos. Por otro lado, cuando la frecuencia está en la brecha, el paquete es completamente reflejado por la estructura. Cuando en la estructura se emula el equivalente de un campo eléctrico constante ($\gamma = 0$) el paquete, dependiendo de su frecuencia central, llega a distintas profundidades dentro de la estructura. Esto es el equivalente mecánico del atrapamiento arcoíris que puede entenderse en términos de las minibandas. Cuando el valor del parámetro que emula el campo eléctrico se aumenta las oscilaciones de Bloch emergen, a una profundidad determinada por el efecto arcoíris.

En el tercer experimento se estudia el transporte de ondas en cavidades caóticas elásticas con simetría de reflexión (izquierda-derecha). En este caso los resultados concuerdan con las predicciones teóricas de la teoría de matrices aleatorias. En este caso aparece una transición de un canal a dos canales abiertos. También, se muestra que el sistema no puede ser abierto completamente para bajas frecuencias.

Finalmente daremos algunos temas que podrían realizarse posteriormente. En primer lugar las investigaciones experimentales y teóricas sobre las vibraciones fuera del plano de una placa rectangular son muy limitadas. Es por ello que son necesarios más estudios

al respecto y llegar a frecuencias más altas. En el estudio de la referencia [19] sólo se obtuvieron resultados para 8 modos. Un estudio que también está faltando es el de transporte de ondas en el plano para cavidades caóticas y caóticas simétricas. Estos sin duda, requieren de mucho tiempo y esfuerzo. De igual importancia surge la necesidad de estudiar una barra con estructura tipo *chirp* que exhiba el análogo mecánico del tunelaje Zenner.

Apéndice A

Caos una definición simple

En los años 20's se tenía la idea errónea de que los investigadores físicos de las nuevas generaciones se dedicarían a calcular decimales de cantidades y números fundamentales como π , debido a que casi todos los fenómenos de la naturaleza eran bien explicados con los modelos conocidos hasta el momento. Es decir, se creía que el mundo era determinista y por tanto, que el estado actual determina en algún sentido el estado futuro. El surgimiento de la teoría del caos vino a demostrar que la naturaleza no es determinista, pues la alta sensibilidad a las condiciones iniciales, puede producir estados completamente diferentes a tiempos posteriores. Nuevos estudios en el campo del caos se están desarrollando en la actualidad, tanto en la proposición de nuevas teorías y, como en el caso de esta tesis, comprobando su validez experimental.

En este Apéndice se definen los conceptos necesarios para que el lector comprenda los experimentos y los análisis correspondientes al caos del capítulo 5. Primero se establece el concepto de caos en la sección A.1, a continuación (sección A.2) se muestran y definen los billares dinámicos bajo estudio.

A.1 El caos

Aunque existen varias maneras de definir el caos que pueden ser vistos en la literatura correspondiente, se ha optado por definirlo como a continuación se presenta.

En el marco de la mecánica clásica se pueden encontrar, en general, dos tipos de movimiento; el regular, asociado a sistemas integrables, y el movimiento caótico asociado a sistemas no integrables. Se pueden distinguir ambos sistemas mediante el estudio de la evolución temporal de las trayectorias que siguen los cuerpos en estos sistemas. Si se consideran dos trayectorias con condiciones iniciales ligeramente distintas. Si las trayectorias se separan exponencialmente, nos referiremos a sistemas caóticos de otra manera hablamos de un sistema integrable. En otras palabras, los sistemas caóticos presentan una alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

En la Figura A.1 se tiene un ejemplo ilustrativo de los sistemas antes mencionados: se conectan dos péndulos, el segundo colgando del extremo del primero, este sistema es llamado péndulo doble. Para este ejemplo son comparados dos casos, la primera masa de

ambos péndulos se colocará horizontal o con un ángulo de 0 grados, la segunda masa del primer péndulo doble también comienza en 0 grados, pero la segunda masa del segundo péndulo doble comenzará con un pequeño ángulo de 0.1 grados, respecto a la horizontal, y se dejan evolucionar en el mismo instante de tiempo. Se observan sus trayectorias y sus posiciones finales a un mismo tiempo Δt y se puede ver que son muy diferentes.

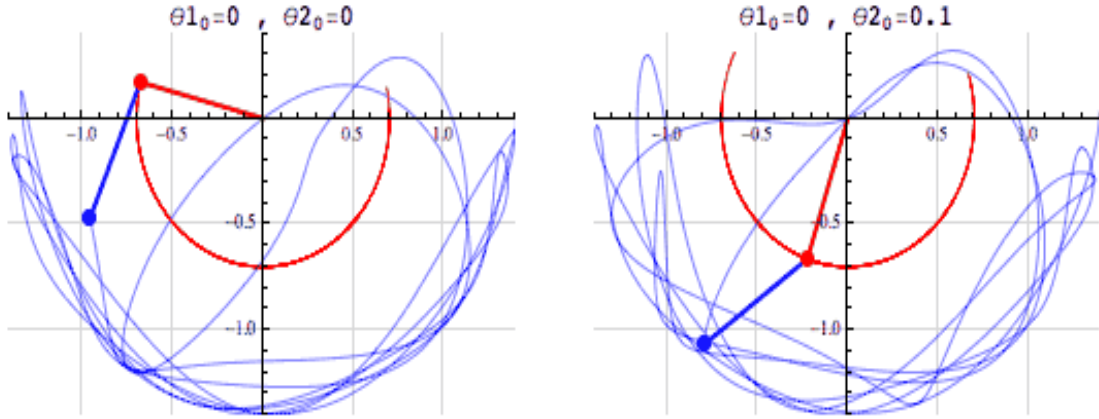


Figura A.1: Péndulos dobles. La figura de la derecha muestra un ligero cambio en el ángulo inicial de la segunda masa $\theta_2 = 0.1$. la trayectoria roja de la primera masa y la trayectoria azul de la segunda masa son completamente distintas, así mismo su posición final en el mismo instante de tiempo.

Una definición matemática más formal de un sistema con caos se da con el exponente de Lyapunov [schuster deterministic chaos an], el cual es una cantidad que caracteriza el grado de separación entre las dos trayectorias que al inicio se encontraban muy cercanas. Éste se define como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} \right|, \quad (\text{A.1})$$

donde $\delta y(t_0)$ es la separación inicial al tiempo inicial t_0 , $\delta y(t)$ es la separación al evolucionar al tiempo t y finalmente λ es el exponente de Lyapunov. Cuando este valor es positivo, las trayectorias crecen y el sistema es caótico, con un exponente igual a cero se tiene el caos débil, por último, cuando las trayectorias se acercan al transcurrir el tiempo, se tiene un atractor y el exponente toma un valor negativo.

Otros ejemplos de sistemas caóticos incluyen el sistema solar, las placas tectónicas, los fluidos en régimen turbulento, los crecimientos de población y los billares dinámicos que serán tratados a continuación.

A.2 Los billares dinámicos

Entre todos los sistemas caóticos que pueden ser fácilmente estudiados, se encuentran los billares. Un billar es un sistema dinámico con una idealización hamiltoniana en la cual, una partícula alterna entre movimiento rectilíneo y reflexiones especulares en la fronteras que la confinan, es decir, el ángulo de incidencia justo antes de la colisión es igual al ángulo de reflexión justo después de la colisión con el contorno. En este caso se envían ondas sinusoidales monocromáticas en el régimen de rayos, lo cual produce que las dispersiones con las fronteras se puedan tomar como reflexiones especulares.

Los billares son sistemas dinámicos físicos y/o modelos matemáticos que representan muchos fenómenos, donde una o mas partículas en movimiento rectilíneo, e incluso ondas en el límite de rayos, están contenidas dentro de estos sistemas y colisionan en las fronteras con reflexiones especulares. Sus propiedades dinámicas son determinadas por las geometrías de las paredes y pueden variar de completamente regulares o integrables a totalmente caóticas. Debido a que ya existen muchos estudios relacionados a estos sistemas, son los candidatos ideales para el estudio propuesto. En la Figura A.2 se muestran dos tipos de billares desde el punto de vista dinámico, en donde el estudio de la evolución temporal de dos partículas con condiciones iniciales ligeramente distintas determina si son o no caóticos. En la parte b), se tiene un caso idéntico al péndulo doble donde un ligero cambio al inicio produce caos.

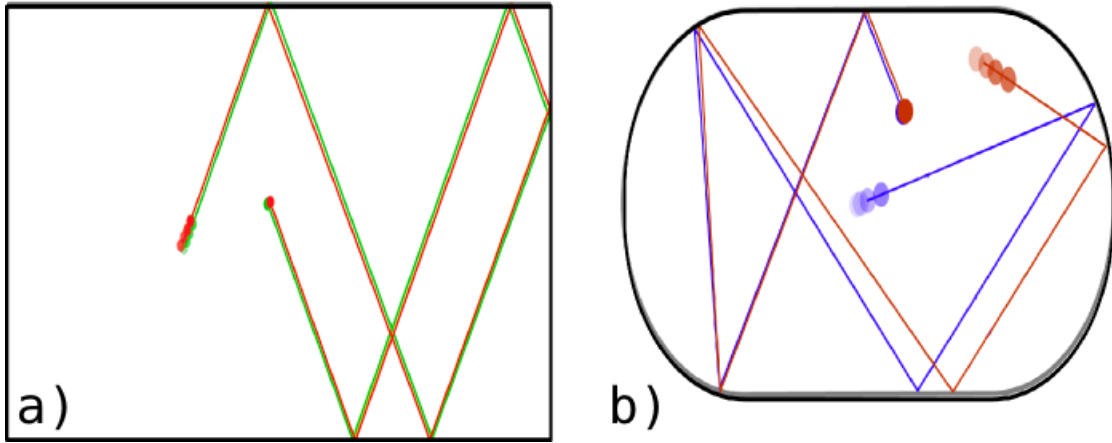


Figura A.2: Dos tipos de billares. En a) se tienen dos partículas encerradas en una geometría rectangular, la evolución temporal es muy parecida aún cambiando las condiciones de inicio solo un poco. Para el caso b) se forma un nuevo billar reemplazando dos fronteras opuestas por semi-círculos (este es llamado estadio o billar de Bunimovich). La posición final de los dos cuerpos es completamente distinta al cambiar ligeramente la posición inicial.

Como se puede ver en la Figura A.2 b) un sistema tan simple puede exhibir caos. Por ende, no es posible estudiarlo de manera que, si para una partícula encerrada en éste, se

conocen sus ecuaciones de evolución temporal características y sus condiciones iniciales fijas, se puede saber exactamente su trayectoria a través del tiempo. Por ello se requiere ahora de una perspectiva estadística de estudio.

Cuando los sistemas son ondulatorios, en el límite de rayos (altas frecuencias) el comportamiento caótico se espera. Sin embargo a frecuencias no tan altas puede uno preguntarse si el caos que aparece en altas frecuencias tendrá algún efecto en el sistema ondulatorio. La respuesta es afirmativa, el caos se ve al menos en la repulsión de niveles. En la sección 5.1 se define el concepto de universalidad de fluctuaciones, en el que queda de manifiesto la necesidad de realizar un análisis de tipo estadístico para el transporte de ondas en placas delgadas a través de cavidades caóticas.

Apéndice B

Modos de transmisión para ondas fuera del plano

Los dos tipos de vibraciones que se pueden producir en las guías de onda son fuera del plano y dentro del plano (ver sección 2.4).

El modelo teórico que describe el comportamiento de los modos fuera del plano para la geometría propuesta en las guías de onda es la teoría clásica de placas dada por [8],

$$D\nabla^4\psi(x, y; t) + \rho h \frac{\partial^2\psi(x, y; t)}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{B.1})$$

donde ρ es la densidad, h es el grosor de la placa y t el tiempo. La rigidez flexional de las placas D viene dada como,

$$D = \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)}, \quad (\text{B.2})$$

con E es el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson. Para encontrar las frecuencias en las cuales existe apertura de modos de transmisión, en la referencia [62], se resuelve la ecuación B.1 proponiendo lo siguiente,

$$\psi(x, y; t) = \overbrace{\varphi(y)}^{\text{parte 1}} \underbrace{e^{i(k_x x - \omega t)}}_{\text{parte 2}}. \quad (\text{B.3})$$

Es decir, la solución general es dividida en dos partes, una onda viajera en la dirección x y una función $\varphi(y)$ en la dirección y . Se trabaja sobre la función en la parte 1 sabiendo que los modos abren cuando la propagación es nula ($\psi_{x=0}$) en la dirección x . De esta manera los dos primeros modos se encuentran a frecuencia de 0 Hertz, mientras que los restantes vienen dados por

$$f_n = (2n - 1)^2 \frac{\pi}{8W^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad \text{para } n \geq 2. \quad (\text{B.4})$$

Las frecuencias de apertura, para los tres primeros modos, dados en Hertz, son:

$$\begin{aligned}
f_1 &= 0, & \text{Primer torsional,} \\
f_2 &= 0, & \text{Primer flexional,} \\
f_3 &= 3488.1, & \text{Segundo torsional.}
\end{aligned}$$

Con esto en cuenta, es posible calcular mas modos de transmisión, pero debido a las limitaciones en la técnica experimental y a la nula existencia en la literatura de predicciones teóricas con un mayor número de modos de transmisión, los análisis se llevan a cabo en los dos primeros modos y se comprueba la existencia del tercero. La causa de esto se debe a que la matriz S se complica al abrir más modos (ver apéndice C). Como resultado del análisis previo, no es posible que cualquier modo de vibración se trasmita hacia la cavidad en cualquier frecuencia, comenzará a viajar en la dirección x positiva y negativa (ver Figura 5.4 superior), cuando hay energía suficiente para producir un modo de resonancia a lo ancho de la guía W o en la dirección y . Al ir incrementando la frecuencia abre un nuevo modo y, surge un nuevo modo de transmisión que se manifiesta en la transmisión total y por lo tanto modificará la estadística final. Para este último se valdrá un nuevo modelo, así sucederá sucesivamente al incrementar la frecuencia. Los modos de transmisión son también llamados canales de transmisión.

Apéndice C

Transporte ondulatorio mecánico a través de cavidades caóticas elásticas

Los modelos teóricos que describen el comportamiento del transporte ondulatorio a través de cavidades caóticas ha sido desarrollada y probada, teórica y experimentalmente en cavidades de microondas y puntos cuánticos. En lo que sigue se lleva a cabo un pequeño resumen de la metodología para obtener los modelos correspondientes, dejando al lector la correspondiente bibliografía por si es de su agrado profundizar en dichos temas [80, 81, 82]. La herramienta para comprender los procesos de dispersión en cavidades caóticas es el formalismo dado por la matriz S o la matriz de dispersión.

C.1 Obtención general del modelo teórico del transporte ondulatorio en cavidades caóticas

La teoría utilizada para el estudio de estos sistemas es la teoría de matrices aleatorias ó *random matrix theory* (RMT). Existen dos formas de trabajar con ella, en la primera se desarrolla un modelo estadístico a nivel del hamiltoniano para luego construir la matriz S de dispersión del sistema [83]. En la segunda, las hipótesis se trabajan directamente en la matriz de dispersión. De la matriz S se construyen los coeficientes de transmisión que se relacionan con el transporte, por ejemplo en el caso electrónico, con la fórmula de Landauer y que son proporcionales a la conductancia.

En todos los modelos usados como referencia se considera una dispersión independiente del tiempo. Ahora bien, una cavidad caótica es conectada al exterior a través de dos guías de onda, cuyo ancho de ambas guías es W . El problema para los billares aquí propuestos se toma de la teoría clásica de placas dado en la ecuación B.1. Esta ecuación no tienen soluciones exactas debido a que al desarrollarla existen términos cruzados. Por ello se propone una solución como la dada por la ecuación B.3, En la sección anterior se trabajo con la primera parte para encontrar las frecuencias de apertura, mientras que ahora para encontrar la transmisión que la cavidad dispersa se desarrolla la segunda parte dada por $e^{i(k_x x - \omega t)}$, de este modo se tiene que la solución estacionaria para una guía de onda es,

$$\psi_n(x, y) = \sum_n [a_n e^{ikx} + b_n e^{-ikx}] \varphi_n(y) \quad (\text{C.1})$$

Para desarrollar el problema, se toma un billar caótico con sus dos guías de onda, se divide en tres zonas llamando a las guías de onda como zonas izquierda y derecha y a la cavidad dispersora como el centro. Para la zona izquierda y derecha se tienen las ecuaciones,

$$\psi_n^I(x, y) = \sum_n [a_n e^{ikx} + b_n e^{-ikx}] \varphi_n(y) \quad (\text{C.2})$$

$$\psi_n^D = (x', y') \sum_n [b'_n e^{ikx} + a'_n e^{-ikx}] \varphi_n(y') \quad (\text{C.3})$$

El problema de dispersión de las ondas a través de los billares puede desarrollarse por medio de la matriz S , que relaciona las amplitudes de las ondas entrantes y salientes, quedando de la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

y la matriz S tiene la forma,

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

donde r, r' son las matrices de reflexión y t, t' las correspondientes matrices de transmisión. Aquí a, a', b y b' , son vectores con entradas a_n, a'_n, b_n y b'_n respectivamente. Cuando hay invarianza ante inversiones en el tiempo se tiene que $t = t'$

C.2 La matriz S y su distribución estadística para sistemas con simetría de reflexión especular

Ahora suponemos que la cavidad bajo estudio tiene una simetría de reflexión. Esto es, que las guías son equivalentes de manera que las podemos intercambiar. Las ecuaciones para cada guía quedan ahora como,

$$\psi_n^I(x, y) = \sum_n [a'_n e^{ikx} + b'_n e^{-ikx}] \varphi_n(y) \quad (\text{C.6})$$

$$\psi_n^D = (x', y') \sum_n [b_n e^{ikx} + a_n e^{-ikx}] \varphi_n(y'). \quad (\text{C.7})$$

La matriz S , que relaciona las amplitudes de onda entrante y saliente es,

$$\begin{pmatrix} b' \\ b \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a' \\ a \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

donde,

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Apéndice D

Productos

Productos publicados



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Sound and Vibration

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jsvi

In-plane vibrations of a rectangular plate: Plane wave expansion modelling and experiment

A. Arreola-Lucas^a, J.A. Franco-Villafañe^b, G. Báez^a, R.A. Méndez-Sánchez^{b,*}^a Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, 02200 México DF, Mexico^b Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, A.P. 48-3, 62251 Cuernavaca, Morelos, Mexico

ARTICLE INFO

Article history:

Received 17 April 2014

Received in revised form

11 December 2014

Accepted 31 December 2014

Handling Editor: S. Ilanko

Available online 23 January 2015

ABSTRACT

Theoretical and experimental results for in-plane vibrations of a uniform rectangular plate with free boundary conditions are obtained. The experimental setup uses electromagnetic-acoustic transducers and a vector network analyzer. The theoretical calculations were obtained using the plane wave expansion method applied to the in-plane thin plate vibration theory. The agreement between theory and experiment is excellent for the lower 95 modes covering a very wide frequency range from DC to 20 kHz. Some measured normal-mode wave amplitudes were compared with the theoretical predictions; very good agreement was observed. The excellent agreement of the classical theory of in-plane vibrations confirms its reliability up to very high frequencies

© 2015 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

There is an increasing interest in the in-plane vibrations of plates. This is due to the fact that, in certain specialized applications, high-frequency vibrations appear. This commonly happens in data storage systems, in the kHz range, in which in-plane vibrations cause a problem in following narrow data tracks [1]. These vibrations are also important in ship hull design since there is evidence that in-plane vibrations and high-frequency noise are strongly related [2]. The in-plane modes also play an important role in the transmission of high frequency vibrations through a built-up structure [3]. Furthermore, in-plane modes can be used for non-destructive testing and evaluation of elastic constants [4]. Finally, as in-plane vibrations appear at higher frequencies than transverse vibrations, finite element calculations are more difficult for the former. All these, and other problems not listed, have led to a renewed interest in the phenomenon of in-plane vibration of rectangular plates that cover several orders of magnitude from nanosystems to macrostructures.

There are several recent significant theoretical and numerical contributions to the study of the in-plane vibrations of plates [1–3,5–12]. However, experimental results have been, until recently, very scarce [4,13]. There are two likely reasons of this fact: first, in-plane vibrations appear at high frequencies and second, the measurement of transverse vibrations is easier than the excitation and detection of in-plane modes [13–16]. Such state of affairs started to change when electronic speckle pattern interferometry – ESPI or TV holography – made possible the measurement of in-plane modes [14,17,18]. Thus, there

* Corresponding author. Tel.: +52 55 562 27788; fax: +52 55 562 27775.

E-mail addresses: arreolaarturo@gmail.com (A. Arreola-Lucas), jofravigil@fis.unam.mx (J.A. Franco-Villafañe), gbaez@correo.azc.uam.mx (G. Báez), mendez@fis.unam.mx (R.A. Méndez-Sánchez).

is the need for research on the in-plane vibrations of plates to consolidate the classical theory of in-plane vibrations, especially at high frequencies, to contrast such theory with experimental results.

This work adds to the literature on the subject of in-plane vibration of plates which can be found in Ref. [11]. In the next section, the plane wave expansion method, applied to the classical theory of in-plane vibrations of thin plates, is introduced. This method will be used to calculate the normal modes of a rectangular plate with two sets of boundary conditions, namely all its boundaries free (F–F–F–F) and all edges clamped (C–C–C–C). In Section 3, the experimental methodology to measure the in-plane vibrations of a rectangular plate with free boundaries, using electromagnetic-acoustic transducers and a vector network analyzer, is presented. In Section 4 the theoretical normal-mode frequencies and wave amplitudes are compared with the experimental results, showing a very good agreement. Finally, in Section 5, some conclusions are given.

2. The plane wave expansion method for the in-plane wave equation

The plane wave expansion (PWE) method refers to a computational technique to solve partial differential equations as an eigenvalue problem [19]. This method is popular among the photonic (phononic) crystal community to obtain the dispersion relation of artificial crystals [20–23]. In a previous work [16] it was shown that the PWE method can be implemented to solve the out-of-plane Kirchhoff–Love equation for finite systems. As shown below, this numerical method is also useful to solve the in-plane wave equation for finite systems. The main difference between the plane wave expansion method and other numerical methods is that the boundary conditions are not imposed but are rather simulated by introducing a second medium with certain physical properties. A rectangular cell (see Fig. 1) of dimensions $a \times b$ will be used. The plate is located at the center of the cell surrounded by a host material that, for a plate with free ends, mimics the vacuum and, for a plate with clamped ends, mimics an extremely hard medium [16]. The unit cell is repeated periodically in both directions and its mechanical parameters are replaced by a Fourier series truncated at N plane waves. In what follows, the PWE method, as used to calculate the in-plane normal modes of plates with free-ends, will be described in detail.

The equations that govern the in-plane motion, in the classical theory of in-plane waves of a thin plate, are [24]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

where h and ρ are the thickness and the density of the plate, respectively. The variables $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are the displacements in the X and Y directions, respectively, while the plate stresses are

$$\begin{aligned} N_x &= C(e_{xx} + \nu e_{yy}), \\ N_y &= C(e_{yy} + \nu e_{xx}), \\ N_{xy} &= C(1 - \nu)e_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

where ν is Poisson's ratio and C is the extensional rigidity given by

$$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad (3)$$

with E standing for Young's modulus. The strain–displacement relations are

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (4)$$

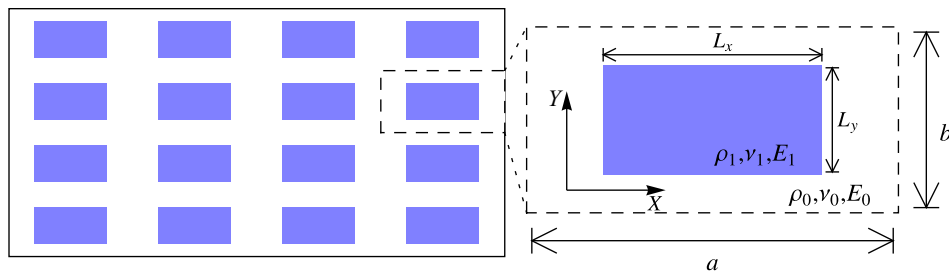


Fig. 1. Plane wave expansion method: a rectangular cell of sides a and b is repeated periodically on the plane. Each cell is composed of the plate of interest, in the center of the cell, surrounded by a host material. The elastic properties of the plate of interest have the subindex 1 while the elastic constants of the host material have the subindex 0. The host material mimics the vacuum, in a certain limit, that yields the free-end boundary conditions for the inner plate.

Since the mechanical properties of the system of Fig. 1 are periodic, one can assume the following Fourier expansions for the coefficients that appear in Eqs. (1) and (2):

$$C = \sum_{\mathbf{G}} \alpha_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (5)$$

$$C\nu = \sum_{\mathbf{G}} \beta_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (6)$$

$$\rho h = \sum_{\mathbf{G}} \eta_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}). \quad (7)$$

Here $\mathbf{r} = (x, y)$ is the position and $\mathbf{G} = (G_x, G_y) = 2\pi(p/a, q/b)$ is a vector of the reciprocal lattice with p and q integers. The displacements u and v are also periodic and can be written in terms of Fourier series as

$$u = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (8)$$

$$v = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \sum_{\mathbf{G}} \psi_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (9)$$

where $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ is the wave vector and ω the angular frequency.

Inserting the expansions (5)–(9) in Eq. (1) one gets, for each \mathbf{G} ,

$$\sum_{\mathbf{G}'} \mathbb{M}_{xx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \phi_{\mathbf{G}'} + \mathbb{M}_{xy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \psi_{\mathbf{G}'} = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \eta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} \phi_{\mathbf{G}'}, \quad (10)$$

$$\sum_{\mathbf{G}'} \mathbb{M}_{yx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \phi_{\mathbf{G}'} + \mathbb{M}_{yy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \psi_{\mathbf{G}'} = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \eta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} \psi_{\mathbf{G}'}, \quad (11)$$

where

$$\mathbb{M}_{xx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2} (\alpha_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} - \beta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'})(k_y + G'_y)(k_y + G_y) + \alpha_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}(k_x + G'_x)(k_x + G_x), \quad (12)$$

$$\mathbb{M}_{xy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2} (\alpha_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} - \beta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'})(k_x + G'_x)(k_y + G_y) + \beta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}(k_x + G_x)(k_y + G'_y), \quad (13)$$

$$\mathbb{M}_{yx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2} (\alpha_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} - \beta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'})(k_x + G_x)(k_y + G'_y) + \beta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}(k_x + G'_x)(k_y + G_y), \quad (14)$$

and

$$\mathbb{M}_{yy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2} (\alpha_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} - \beta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'})(k_x + G'_x)(k_x + G_x) + \alpha_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}(k_y + G'_y)(k_y + G_y). \quad (15)$$

Eqs. (10) and (11) can be written in matrix form as a generalized eigenvalue equation with an infinite number of columns and rows:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_{xx} & \mathbb{M}_{xy} \\ \mathbb{M}_{yx} & \mathbb{M}_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbb{N} & 0 \\ 0 & \mathbb{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (16)$$

with ϕ and ψ vectors with entries $\phi_{\mathbf{G}'}$ and $\psi_{\mathbf{G}'}$, respectively, and

$$\mathbb{N}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \eta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}. \quad (17)$$

The Fourier coefficients of Eqs. (5)–(7) can be calculated analytically for regular shaped plates, such as the plate of Fig. 1. Plates with irregular shape can also be calculated but in this case the Fourier coefficients should be obtained numerically. The free or clamped boundary conditions can be obtained by defining a host material with $\rho_0 \rightarrow 0$ or $\rho_0 \rightarrow \infty$ [16], respectively. Although the generalized eigenvalue equation (16) includes an infinite number of terms, in the numerical calculations the series were truncated to large partial sums. In Fig. 2 some eigenvalues for a rectangular plate with free-ends, as a function of the number of plane waves, are plotted. It can be observed that 15×15 plane waves are enough to get stable results at low frequencies but 25×25 plane waves are needed to obtain similar results at high frequencies.

In Tables 1 and 2 the dimensionless normal-mode frequencies of in-plane vibrations of a plate of different aspect ratios with free (F–F–F–F) and clamped (C–C–C–C) ends, respectively, are shown. The results of the PWE method show a very good

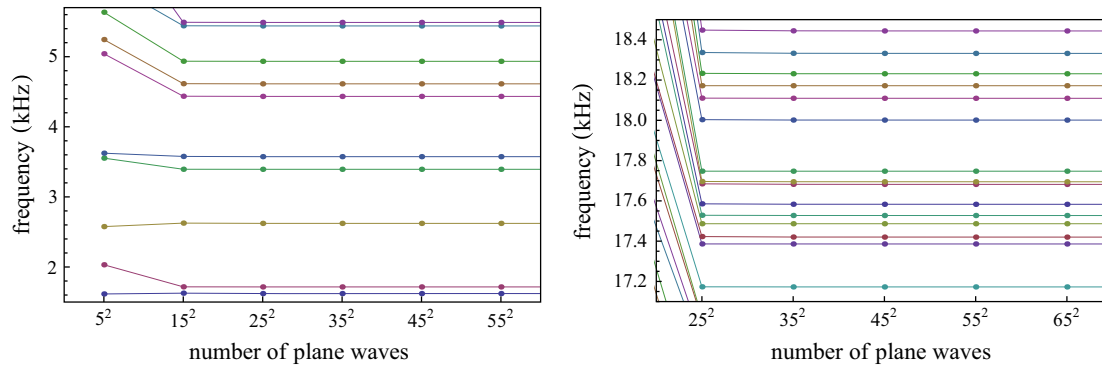


Fig. 2. Convergence of the plane wave expansion method for the lower normal modes (left panel) and for higher frequencies (right panel). The results correspond to a plate of 1474 mm × 355 mm.

Table 1

Dimensionless normal-mode frequencies $\Omega = \omega L_x \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$ for the in-plane vibrations of a rectangular plate with different aspect ratios (L_x/L_y) and completely free (F–F–F) boundary conditions.

| Mode | Aspect ratio $L_x/L_y = 1$ | | | | | Aspect ratio $L_x/L_y = 2$ | | | | |
|------|----------------------------|----------|----------|----------|----------------|----------------------------|----------|----------|----------|----------------|
| | PWE | | Gorman I | | Du and Bardell | PWE | | Gorman I | | Du and Bardell |
| | Ω | Ω | %Diff. | Ω | %Diff. | Ω | Ω | %Diff. | Ω | %Diff. |
| 1 | 2.321 | 2.320 | 0.043 | 2.321 | 0.000 | 1.958 | 1.956 | 0.112 | 1.954 | 0.205 |
| 2 | 2.474 | 2.472 | 0.081 | 2.472 | 0.081 | 2.963 | 2.960 | 0.101 | 2.961 | 0.068 |
| 3 | 2.474 | 2.472 | 0.081 | 2.472 | 0.081 | 3.270 | 3.268 | 0.061 | 3.267 | 0.092 |
| 4 | 2.631 | 2.628 | 0.114 | 2.628 | 0.114 | 4.728 | 4.726 | 0.042 | 4.726 | 0.042 |
| 5 | 2.990 | 2.988 | 0.067 | 2.987 | 0.100 | 4.786 | 4.784 | 0.042 | 4.784 | 0.042 |
| 6 | 3.454 | 3.452 | 0.058 | 3.452 | 0.058 | 5.208 | 5.208 | 0.000 | 5.205 | 0.058 |
| 7 | 3.724 | 3.724 | 0.000 | | | 5.259 | 5.258 | 0.019 | | |
| 8 | 3.724 | 3.724 | 0.000 | | | 5.369 | 5.370 | −0.019 | | |
| 9 | 4.305 | 4.306 | −0.023 | | | 6.150 | 6.148 | 0.033 | | |
| 10 | 4.970 | 4.970 | 0.000 | | | 6.448 | | | | |
| 11 | 4.970 | 4.970 | 0.000 | | | 6.597 | 6.596 | 0.015 | | |
| 12 | 5.047 | 5.046 | 0.020 | | | 6.750 | | | | |
| 13 | 5.257 | 5.258 | −0.019 | | | 6.858 | 6.856 | 0.029 | | |
| 14 | 5.288 | 5.286 | 0.038 | | | 7.452 | | | | |
| 15 | 6.044 | | | | | 7.944 | 7.948 | −0.050 | | |
| 16 | 6.100 | 6.100 | 0.000 | | | 8.546 | | | | |
| 17 | 6.100 | 6.100 | 0.000 | | | 8.667 | | | | |

The results obtained with the plane wave expansion method (PWE) are compared with other methods. Gorman I, Du and Bardell results are taken from Refs. [2,3,7], respectively.

agreement with the results available in the literature [2,3,5,7] with a difference less than 1.5 percent. This shows that the PWE method can be used to calculate the normal-mode vibrations of in-plane waves.

3. Experimental setup to measure in-plane waves

To measure the in-plane normal-mode frequencies for the rectangular plate with free-ends, acoustic resonant spectroscopy (ARS) [25] is used. The experimental setup, shown in Fig. 3, consists of a vector network analyzer (VNA, Anritsu MS4630B); a high fidelity audio amplifier (Cerwin-Vega CV900) and two electromagnetic-acoustic transducers (EMATs). The harmonic signal of frequency f , generated by the VNA, is sent to the audio amplifier whose output is taken by the EMAT exciter. This transducer produces mechanical waves in the plate without mechanical contact. The EMAT detector measures the response of the plate in another location. The signal of this EMAT is registered directly by the VNA which yields the response of the plate at the frequency f . The frequency is changed to $f + \Delta f$, with $(\Delta f)/f \ll 1$. The response, as a function of the frequency, is then obtained and the peaks on it will correspond to the resonant frequencies of the plate.

The in-plane resonances of the plate are excited and detected selectively when using electromagnetic-acoustic transducers which consist of coils and magnets in particular configurations (see below). Since the transducers operate through eddy currents, they have to be located in the vicinity of a paramagnetic metal. Let us briefly recall the principles of

Table 2

Dimensionless normal-mode frequencies $\Omega = \omega L_x \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ for the in-plane vibrations of a rectangular plate with different aspect ratios (L_x/L_y) and completely clamped (C–C–C–C) boundary conditions.

| Mode | Aspect ratio $L_x/L_y = 1$ | | | | | Aspect ratio $L_x/L_y = 2$ | | | | |
|------|----------------------------|----------|-----------|----------|----------------|----------------------------|----------|-----------|----------|----------------|
| | PWE | | Gorman II | | Du and Bardell | PWE | | Gorman II | | Du and Bardell |
| | Ω | Ω | %Diff. | Ω | | Ω | Ω | %Diff. | Ω | %Diff. |
| 1 | 3.551 | 3.555 | –0.113 | 3.555 | –0.113 | 4.794 | 4.789 | 0.104 | 4.789 | 0.104 |
| 2 | 3.551 | 3.555 | –0.113 | 3.555 | –0.113 | 6.348 | 6.379 | –0.486 | 6.379 | –0.486 |
| 3 | 4.241 | 4.235 | 0.142 | 4.235 | 0.142 | 6.703 | 6.712 | –0.134 | 6.712 | –0.134 |
| 4 | 5.187 | 5.185 | 0.039 | 5.185 | 0.039 | 7.101 | 7.049 | 0.738 | 7.049 | 0.738 |
| 5 | 5.846 | 5.859 | –0.222 | 5.859 | –0.222 | 7.650 | 7.608 | 0.552 | 7.608 | 0.552 |
| 6 | 5.949 | 5.894 | 0.933 | 5.895 | 0.916 | 8.180 | 8.140 | 0.491 | 8.140 | 0.491 |
| 7 | 5.949 | 5.894 | 0.933 | | | 8.987 | 8.998 | –0.122 | | |
| 8 | 6.659 | 6.708 | –0.730 | | | 9.535 | 9.515 | 0.210 | | |
| 9 | 7.104 | | | | | 9.861 | | | | |
| 10 | 7.104 | | | | | 10.640 | | | | |
| 11 | 7.280 | 7.281 | –0.014 | | | 11.260 | 11.250 | 0.089 | | |
| 12 | 7.572 | 7.597 | –0.329 | | | 11.700 | 11.570 | 1.124 | | |
| 13 | 7.865 | 7.800 | 0.833 | | | 11.900 | 11.740 | 1.363 | | |
| 14 | 8.610 | | | | | 12.200 | | | | |
| 15 | 8.610 | | | | | 12.430 | | | | |
| 16 | 8.698 | 8.718 | –0.229 | | | 13.000 | | | | |
| 17 | 8.738 | | | | | 13.020 | 12.930 | 0.696 | | |

The results obtained with the plane wave expansion method (PWE) are compared with other methods. Gorman II, Du and Bardell results are taken from Refs. [5,3,7], respectively.

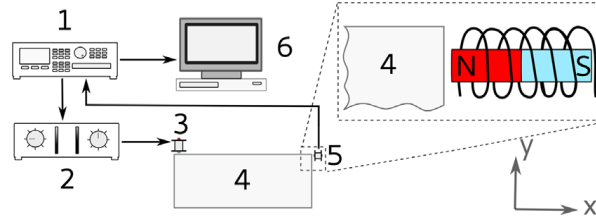


Fig. 3. Block diagram of the experimental setup. The vector network analyzer or VNA (1) sends a sinusoidal signal to the audio amplifier (2). The amplified signal is sent to the EMAT exciter (3) which produces a mechanical vibration in the aluminum plate (4). The vibrations of the plate are measured by the EMAT detector (5). The measured signal by the EMAT is sent back to the VNA. The experimental data are finally collected in the computer (6) via GPIB.

operation of the EMATs; a detailed explanation of the operation of these transducers is given in Refs. [25,26]. The EMAT, as an exciter, operates in the following way:

1. A harmonic current, of frequency f , passes through the wire of the EMAT's coil; this generates a magnetic field $B(t)$ that varies in time with the same frequency f .
2. Due to Faraday's law of induction, on any circuit of the paramagnetic material which is close to the EMAT's coil, local eddy currents are generated; these currents are also harmonic.
3. The eddy currents, induced on the paramagnetic metal, interact with the EMAT's magnet through the Lorentz force.
4. The effect of the Lorentz force on the metal will become a mechanical vibration which travels along the plate.

The EMATs are also invertible, i.e. they can detect the vibrations of a paramagnetic metal. The electromagnetic-acoustic transducer, as a detector, operates in this way:

1. There will be a change of magnetic flux in the loops inside a vibrating paramagnetic metal when the EMAT's permanent magnet is near it.
2. The change of flux, by Faraday's law, will produce eddy currents in the metal; these currents oscillate with the frequency f of the vibrating metal.
3. The eddy currents will generate their own alternating magnetic field, which flows through the surface enclosed by the EMAT's coil. This variable flux will induce on the EMAT's coil an electromotive force measured by the VNA.

Table 3

In-plane normal-mode frequencies of a rectangular aluminum plate of 1474 mm × 355 mm × 6.35 mm with free ends (F–F–F) measured with acoustic resonant spectroscopy (ARS) and calculated with the plane wave expansion method (PWE).

| Mode | ARS (Hz) | PWE (Hz) | Diff. (%) | Mode | ARS (Hz) | PWE (Hz) | Diff. (%) | Mode | ARS (Hz) | PWE (Hz) | Diff. (%) |
|------|----------|----------|-----------|------|----------|----------|-----------|------|----------|----------|-----------|
| 1 | 731 | 730.0 | −0.14 | 33 | 10,015 | 10,054.4 | 0.39 | 65 | 14,910 | 14,953.2 | 0.29 |
| 2 | 1632 | 1636.2 | 0.26 | 34 | 10,035 | 10,099.3 | 0.64 | 66 | 14,938 | 14,960.2 | 0.15 |
| 3 | 1740 | 1734.2 | −0.33 | 35 | 10,094 | 10,112.2 | 0.18 | 67 | 15,053 | 14,994.0 | −0.39 |
| 4 | 2634 | 2645.5 | 0.44 | 36 | 10,496 | 10,398.9 | −0.92 | 68 | 15,094 | 15,087.1 | −0.05 |
| 5 | 3445 | 3426.8 | −0.53 | 37 | 10,827 | 10,892.2 | 0.60 | 69 | 15,387 | 15,366.5 | −0.13 |
| 6 | 3580 | 3602.5 | 0.63 | 38 | 10,886 | 10,912.4 | 0.24 | 70 | 15,485 | 15,548.5 | 0.41 |
| 7 | 4434 | 4465.6 | 0.71 | 39 | 10,939 | 10,973.9 | 0.32 | 71 | 15,674 | 15,567.1 | −0.68 |
| 8 | 4598 | 4640.0 | 0.91 | 40 | 11,098 | 11,143.1 | 0.41 | 72 | 15,695 | 15,707.7 | 0.08 |
| 9 | 5017 | 4971.2 | −0.91 | 41 | 11,455 | 11,339.7 | −1.01 | 73 | 15,721 | 15,730.9 | 0.06 |
| 10 | 5435 | 5475.4 | 0.74 | 42 | 11,465 | 11,525.0 | 0.52 | 74 | 15,726 | 15,763.5 | 0.24 |
| 11 | 5497 | 5527.9 | 0.56 | 43 | 11,825 | 11,849.4 | 0.21 | 75 | 16,009 | 16,052.9 | 0.27 |
| 12 | 6167 | 6084.9 | −1.33 | 44 | 11,859 | 11,904.2 | 0.38 | 76 | 16,105 | 16,144.5 | 0.25 |
| 13 | 6350 | 6332.9 | −0.27 | 45 | 12,005 | 12,080.7 | 0.63 | 77 | 16,317 | 16,306.6 | −0.06 |
| 14 | 6353 | 6333.8 | −0.30 | 46 | 12,339 | 12,177.4 | −1.31 | 78 | 16,323 | 16,327.8 | 0.03 |
| 15 | 6435 | 6481.1 | 0.72 | 47 | 12,605 | 12,695.9 | 0.72 | 79 | 16,429 | 16,480.8 | 0.32 |
| 16 | 6660 | 6687.7 | 0.42 | 48 | 12,705 | 12,729.4 | 0.19 | 80 | 16,490 | 16,547.3 | 0.35 |
| 17 | 6839 | 6756.3 | −1.21 | 49 | 12,732 | 12,737.3 | 0.04 | 81 | 16,782 | 16,606.3 | −1.05 |
| 18 | 7352 | 7303.3 | −0.66 | 50 | 12,844 | 12,895.1 | 0.40 | 82 | 17,003 | 17,012.4 | 0.06 |
| 19 | 7405 | 7437.0 | 0.43 | 51 | 13,015 | 12,916.4 | −0.76 | 83 | 17,054 | 17,089.7 | 0.21 |
| 20 | 7449 | 7497.7 | 0.65 | 52 | 13,028 | 13,100.4 | 0.56 | 84 | 17,078 | 17,136.2 | 0.34 |
| 21 | 7561 | 7556.5 | −0.06 | 53 | 13,095 | 13,123.3 | 0.22 | 85 | 17,100 | 17,146.3 | 0.27 |
| 22 | 7681 | 7686.4 | 0.07 | 54 | 13,185 | 13,234.3 | 0.37 | 86 | 17,348 | 17,402.6 | 0.31 |
| 23 | 7877 | 7898.4 | 0.27 | 55 | 13,300 | 13,359.5 | 0.45 | 87 | 17,515 | 17,496.5 | −0.11 |
| 24 | 8094 | 8094.9 | 0.01 | 56 | 13,541 | 13,554.9 | 0.10 | 88 | 17,575 | 17,574.6 | −0.00 |
| 25 | 8138 | 8151.8 | 0.17 | 57 | 13,675 | 13,632.4 | −0.31 | 89 | 17,682 | 17,580.5 | −0.57 |
| 26 | 8457 | 8490.5 | 0.40 | 58 | 13,800 | 13,719.1 | −0.59 | 90 | 17,723 | 17,635.3 | −0.49 |
| 27 | 8692 | 8672.7 | −0.22 | 59 | 13,886 | 13,922.2 | 0.26 | 91 | 17,763 | 17,734.6 | −0.16 |
| 28 | 9042 | 9076.5 | 0.38 | 60 | 14,007 | 14,048.2 | 0.29 | 92 | 17,766 | 17,801.2 | 0.20 |
| 29 | 9163 | 9214.2 | 0.56 | 61 | 14,281 | 14,256.7 | −0.17 | 93 | 17,832 | 17,855.9 | 0.13 |
| 30 | 9328 | 9330.7 | 0.03 | 62 | 14,339 | 14,333.9 | −0.04 | 94 | 18,070 | 17,899.1 | −0.95 |
| 31 | 9447 | 9449.7 | 0.03 | 63 | 14,482 | 14,336.2 | −1.01 | 95 | 18,171 | 18,128.7 | −0.23 |
| 32 | 9466 | 9494.1 | 0.30 | 64 | 14,515 | 14,567.7 | 0.36 | | | | |

4. Comparison between theory and experiment

In Fig. 3 the configuration of the EMATs used to excite and detect the in-plane vibrations is shown. In this configuration the dipole moment axis of both the EMAT's coil and permanent magnet coincides and can be considered as the EMAT's axis; the axis of the exciter is parallel to the Y-axis while the axis of the detector is parallel to the X-axis. To decrease the possibility of missing resonances, i.e. to avoid measuring on a nodal line, the EMATs were located at the corners of the plate on the long side, where it is expected that the wave amplitude will have a maximum due to the free-ends. All the results presented in this section were obtained with this arrangement of EMATs. The main advantage of using the electromagnetic-acoustic transducers, in the configuration of Fig. 3, is that they are highly selective to in-plane vibrations. This result is very important since the measurement of in-plane vibrations is a difficult task.

The spectrum of a rectangular aluminum plate of 1474 mm × 355 mm and thickness 6.35 mm, measured with the setup of Fig. 3, is given in Table 3 and plotted in Fig. 4. Something worthy to remark, as it can be seen in the lower panels of this figure, is that only in-plane resonances are observed. The theoretical prediction, obtained with the plane wave expansion method, using the best fit elastic constants of aluminum ($E = 71.1$ GPa and $\nu = 0.36$) and the measured density $\rho = 2708$ kg/m³, is also given in Table 3 and plotted in Fig. 4. The agreement is excellent at low frequencies and, remarkably, also at high frequencies (see lower panels of this figure). The difference between the experiment and the theoretical predictions was also quantified and is plotted, as a function of the normal mode number, in Fig. 5. One can observe in this figure that the difference is always less than 1.4 percent, a very reliable value for more than 90 normal modes.

The measurement of the components $u(x,y)$ and $v(x,y)$ of the in-plane normal-mode wave amplitudes is performed as follows. The in-plane vibrations of the aluminum plate are generated using an EMAT located at one end of the plate in the configuration of Fig. 3. This device is controlled by the VNA, which sends a signal swept around the resonant frequency of the wave amplitude to be measured. As it is well known, plotting the norm and phase of the response gives a circle in the complex plane; the radius of the circle is proportional to the wave amplitude. Measurements were carried out on a quarter of the plate in a rectangular grid. The EMAT measures the acceleration in the direction of the coil axis [27]. The wave amplitude is then measured using an EMAT located over the plate; the dipole axis of the magnet's EMAT is perpendicular to the X–Y plane while the coil axis is aligned along the X or Y direction to measure the deformation u or v , respectively. To

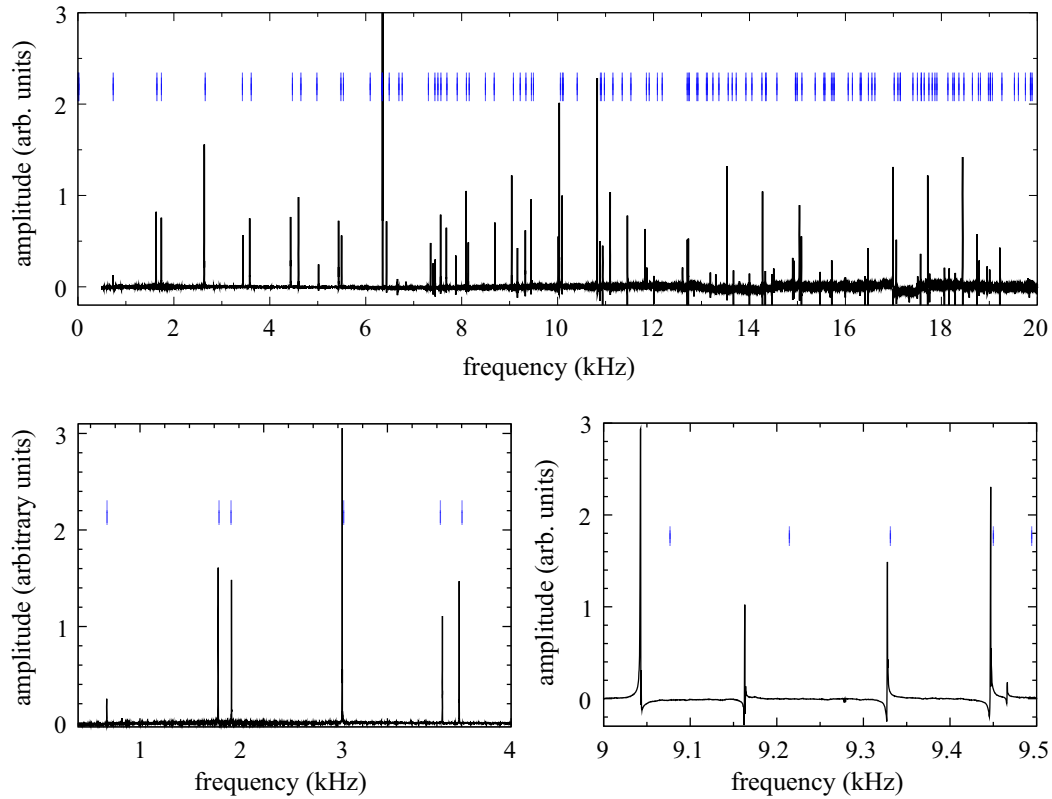


Fig. 4. Upper panel: DC to 20 kHz spectrum of a rectangular aluminum plate obtained with the setup of Fig. 3. The EMATs excite and detect selectively in-plane vibrations. The vertical lines correspond to the theoretical predictions obtained with the plane wave expansion method. In the lower panels amplifications, of the spectrum at low and intermediate frequencies, are given.

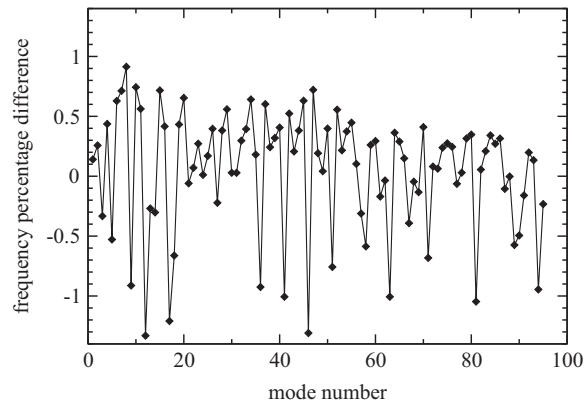


Fig. 5. Percentage difference between the experimental and theoretical normal-mode frequencies as a function of the normal mode number.

obtain the wave amplitude on the full plate, the measured data were reflected on the two axes of symmetry of the system. In Fig. 6 some normal-mode wave amplitudes are given and compared with those calculated with the plane wave expansion method; a very good agreement is obtained.

5. Conclusions

The in-plane vibrations of a rectangular aluminum plate, with free ends, have been studied both theoretically and experimentally. The experiments were performed using a vector network analyzer and electromagnetic-acoustic transducers. For the theoretical calculations, the plane wave expansion method, applied to the classical theory of in-plane waves, was used. The plane wave expansion method was first tested by comparing its results with other numerical methods with free and clamped boundary conditions. For 95 normal modes, within the range of DC–20 kHz, the agreement between theory and experiment is excellent since the difference is less than 1.4 percent. Some normal-mode wave amplitudes were

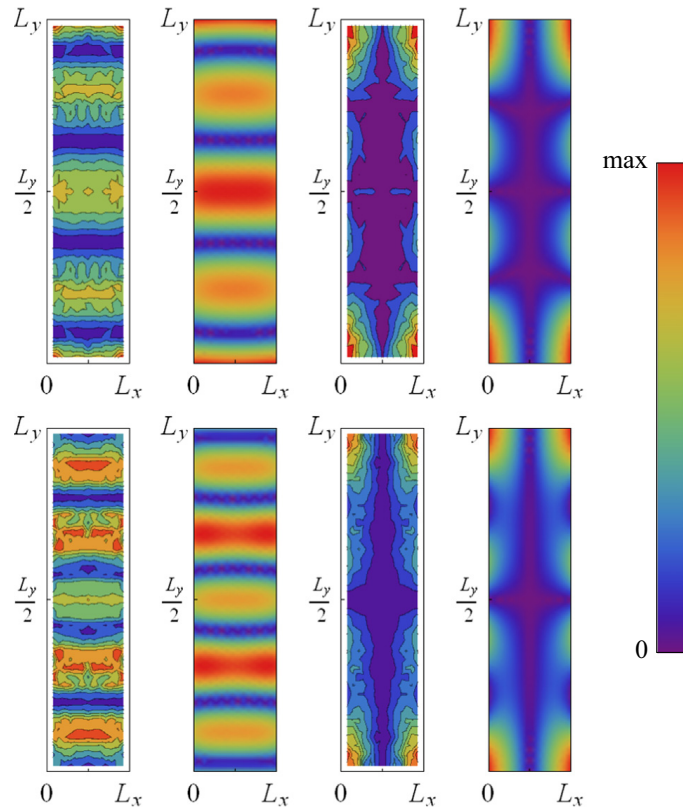


Fig. 6. Theoretical and experimental wave amplitudes (absolute value) of the in-plane normal modes of the rectangular aluminum plate of 1474 mm \times 355 mm \times 6.35 mm. The upper and lower parts correspond to modes 4 and 7 of Table 3, respectively. The first and second columns correspond to the EMAT measurement and PWE prediction of u , respectively; the third and fourth columns correspond to the EMAT measurement and PWE prediction of v , respectively. To avoid spurious border effects, the experimental wave amplitudes were not measured close to the boundary. On the right, the scale is shown.

measured and compared with the theoretical predictions; very good agreement was obtained. Thus, both the plane wave expansion method and the experimental setup based on electromagnetic-acoustic transducers could be very useful to study in-plane vibrations of thin plates with other shapes.

Acknowledgments

This work was partially supported by PAPIIT DGAPA-UNAM under Project IN111311. A.A.L. and J.A.F.V. were supported by a scholarship from CONACYT; A.A.L. was partially supported by CONACYT under Project 79613. Part of this work was written at the Universidad Politécnica de Valencia. We would like to thank Profs. A.L. Salas-Brito, J. Sánchez-Dehesa and S. Ilanko for invaluable comments.

References

- [1] K. Hyde, J.Y. Chang, C. Bacca, J.A. Wickert, Parameter studies for plane stress in-plane vibration of rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration* 247 (2001) 471–487, <http://dx.doi.org/10.1006/jjsvi.2001.3767>.
- [2] D.J. Gorman, Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition, *Journal of Sound and Vibration* 272 (2004) 831–851, [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00421-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00421-8).
- [3] J. Du, W.L. Li, G. Jin, T. Yang, Z. Liu, An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges, *Journal of Sound and Vibration* 306 (2007) 908–927, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.011>.
- [4] D. Larsson, In-plane modal testing of a free isotropic rectangular plate, *Experimental Mechanics* 37 (1997) 339–343, <http://dx.doi.org/10.1007/BF02317428>.
- [5] D.J. Gorman, Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration* 276 (2004) 311–333, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2003.07.037>.
- [6] K.F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover, New York, 1991.
- [7] N.S. Bardell, R.S. Langley, J.M. Dunsdon, On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration* 191 (1996) 459–467, <http://dx.doi.org/10.1006/jjsvi.1996.0134>.
- [8] B. Liu, Y. Xing, Exact solutions for free in-plane vibrations of rectangular plates, *Acta Mechanica Sinica* 24 (2011) 556–567, [http://dx.doi.org/10.1016/S0894-9166\(11\)60055-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0894-9166(11)60055-4).
- [9] L. Dozio, Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with arbitrary elastic boundaries, *Mechanics Research Communications* 37 (2010) 627–635, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2010.09.003>.
- [10] D.J. Gorman, Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries, *Journal of Sound and Vibration* 285 (2005) 941–966, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2004.09.017>.

- [11] D.J. Gorman, Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported, *Journal of Sound and Vibration* 294 (2006) 131–161, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.023>.
- [12] C.H. Huang, C.C. Ma, Experimental and numerical investigations of resonant vibration characteristics for piezoceramic plates, *Journal of the Acoustical Society of America* 109 (2001) 2780–2788, <http://dx.doi.org/10.1121/1.1370359>.
- [13] K. Schaad, G. Simon, C. Ellegaard, Ultrasound resonances in a rectangular plate described by random matrices, *Physica Scripta* T90 (2001) 231–237, <http://dx.doi.org/10.1238/Physica.Topical.090a00231>.
- [14] F.J. Nieves, F. Gascon, A. Bayon, Natural frequencies and mode shapes of flexural vibration of plates: laser-interferometry detection and solutions by Ritz's method, *Journal of Sound and Vibration* 278 (2004) 637–655, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2003.10.046>.
- [15] C.C. Ma, H.Y. Lin, Experimental measurements on transverse vibration characteristics of piezoceramic rectangular plates by optical methods, *Journal of Sound and Vibration* 286 (2005) 587–600, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2004.10.010>.
- [16] B. Manzanares-Martínez, J. Flores, L. Gutiérrez, R.A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, A. Morales, F. Ramos-Mendieta, Flexural vibrations of a rectangular plate for the lower normal modes, *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010) 5105–5115, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2010.06.010>.
- [17] Y.F. Xu, W.D. Zhu, Operational modal analysis of a rectangular plate using non-contact excitation and measurement, *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013) 4927–4939, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.04.018>.
- [18] J.P. Monchalin, J.D. Aussel, R. Heon, C.K. Jen, A. Boundreault, R. Bernier, Measurement of in-plane and out-of-plane ultrasonic displacements by optical heterodyne interferometry, *Journal of Nondestructive Evaluation* 8 (1989) 121–132, <http://dx.doi.org/10.1007/BF00565636>.
- [19] P. Griffin, P. Nagel, R.D. Koshel, The plane-wave expansion method, *Journal of Mathematical Physics* 15 (1974) 1913–1917, <http://dx.doi.org/10.1063/1.1666556>.
- [20] Y. Cao, Z. Hou, Y. Liu, Convergence problem of plane-wave expansion method for phononic crystals, *Physics Letters A* 327 (2004) 247–253, <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2004.05.030>.
- [21] Z. Hou, B.M. Assouar, Modeling of Lamb wave propagation in plate with two-dimensional phononic crystal layer coated on uniform substrate using plane-wave-expansion method, *Physics Letters A* 372 (2008) 2091–2097, <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2007.10.080>.
- [22] A.A. Kutsenko, A.L. Shuvalov, A.N. Norris, Converging bounds for the effective shear speed in 2D phononic crystals, *Journal of Elasticity* 13 (2013) 179–191, <http://dx.doi.org/10.1007/s10659-012-9417-y>.
- [23] B. Manzanares-Martínez, F. Ramos-Mendieta, A. Baltazar, Ultrasonic elastic modes in solid bars: an application of the plane wave expansion method, *Journal of the Acoustical Society of America* 127 (2010) 3503–3510, <http://dx.doi.org/10.1121/1.3373402>.
- [24] Yi-Yuan Yu, *Vibrations of Elastic Plates*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [25] J.A. Franco-Villafañe, E. Flores-Olmedo, G. Báez, O. Gandarilla-Carrillo, R.A. Méndez-Sánchez, Acoustic resonance spectroscopy for the advanced undergraduate laboratory, *European Journal of Physics* 33 (2012) 1761–1769, <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/33/6/1761>.
- [26] A. Morales, L. Gutiérrez, J. Flores, Improved eddy current driver-detector for elastic vibrations, *American Journal of Physics* 69 (2001) 517–522, <http://dx.doi.org/10.1119/1.1336834>.
- [27] A. Díaz-de-Anda, J. Flores, L. Gutiérrez, R.A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, A. Morales, Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions, *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012) 5732–5744, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2012.07.041>.

Por publicarse

Mechanical Rainbow Trapping and Bloch Oscillations in Structured Elastic Systems

A. Arreola-Lucas,¹ G. Báez,² F. Cervera,³ A. Climente,³ R. A. Méndez-Sánchez,⁴ and J. Sánchez-Dehesa³

¹*Posgrado en Ciencias e Ingeniería de Materiales,*

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, 04000 México Distrito Federal, Mexico

²*Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, 04000 México Distrito Federal, Mexico*

³*Wave Phenomena Group, Universitat Politècnica de València,*

Camino de vera s.n. (Edificio 7F), ES46022, Valencia, Spain

⁴*Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México,*

Apartado Postal 48-3, 62210 Cuernavaca Mor., Mexico

The Bloch oscillations and the rainbow trapping are two effects apparently unrelated. The Bloch oscillations, on the one hand, appear in quantum mechanics when a static electric field is applied to a crystal. A incident quantum wave packet starts to oscillate inside it, with a frequency determined by the intensity of the electric field. The rainbow trapping effect, on the other hand, emerges in electromagnetic waves travelling in chirped structures fabricated with a certain rule. In this case the waves are slowed down to different spatial positions that depend on the central frequency of the incident wave packet. Here we experimentally show for the first time the emergence of both, the rainbow trapping effect and the Bloch oscillations in mechanical waves with the same mechanical structure using different values of the chirp parameter. Using extensive numerical simulations a quasiunidimensional chirped structure is designed and constructed. The wave packet dynamics is measured using a Doppler vibrometer. When the chirp intensity vanishes a locally periodic system, with bands and gaps, is built. For different but fixed values of the chirp parameter the wave packet arrives to different positions within the structure as function of the central frequency that lies in the band. This is a mechanical analog of the classical rainbow trapping effect. Increasing the value of the chirp parameter the mechanical Bloch oscillations emerge.

PACS numbers: 61.44, 62.20.D, 62.30.+d, 63.20, 63.20.dd, 81.05.Zx

Sometimes in physics there are apparently unrelated phenomena that, at the end, are just a different face of the same but more general phenomenon. The most known example of this is electromagnetism in which magnetism and electricity were believed to be different phenomena. On the opposite side, there are phenomena that are common to several areas of physics. The development of parallel research to control waves of different nature motivated by the progresses made to control electromagnetic waves is an example. In particular efforts have been made to design acoustic and mechanic metamaterials that mimic properties of optical metamaterials. Although applications have been developed in acoustic systems [1–4] the control of mechanical waves is scarce [5]. Devices for the control of elastic waves are still under design based on numerical studies [6]. The mixture of polarizations and the difficulty to selectively measure the different kinds of vibrations have delayed the progress in this area.

The rainbow trapping effect, on the one hand, is one of the most promising phenomenon in metamaterials. In this phenomenon the electromagnetic wave packets are slowed down, up to different spatial depths of the synthetic structure. The reached spatial depths depend on the central frequency of the wave packet. Since its discovery, few years ago [7–16], several potential applications have been found not only in metamaterials. In particular, using this phenomenon, the light can be trapped or multiplexed [1, 17–21]. In this letter we will shown that

it is possible to reduce the speed of torsional waves using a chirped structure; the wave reaches different depths in the structure as function of frequency. This is only possible when the system has a high quality factor, as it is in the elastic cavities employed [22].

On the other hand, the Bloch oscillations, found firstly in solid-state physics, [23–25] also appear in other undulatory systems like dielectric structures [26–28] and waveguides [29], ultracold atoms [30], phononic crystals [31], sound [32, 33], superconducting nanowires [34] and more recently in molecular motion [35]. Thus the Bloch oscillations are expected in elastic systems. Up to now, the goal was not achieved again due to the difficulty of selectively measuring different kinds of elastic waves.

In this paper we experimentally show the emergence of both, the Bloch oscillations and the rainbow trapping effect in elastic waves. The Bloch oscillations, on the one hand, emerge in a mechanical chirped structure that mimics an electric field in a periodic potential. On the other hand, with a different value of the chirp parameter, it is shown that it is possible to reduce the speed for torsional mechanical waves; the wave reaches different depths in the mechanical structure as function of frequency. This is an elastic version of the rainbow trapping.

As illustrated in Fig. 1, the beam consists of three parts: the machined structure is located at one end; in the middle a uniform part follows and, at the other end, a passive vibration isolation system is built. The chirped system consists of a beam of rectangular cross section

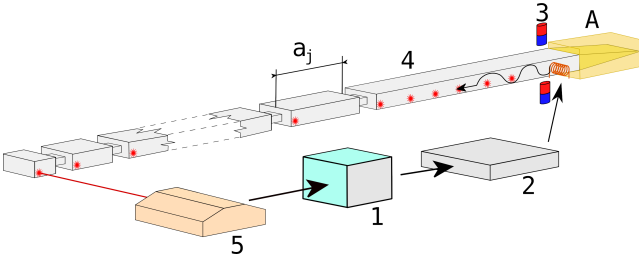


FIG. 1. Structured beam and experimental setup. (1) NI PXI, (2) high-fidelity audio amplifier, (3) Electromagnetic-acoustic transducer. (4) Machined beam with the chirped structure and (5) Doppler vibrometer. The beam, used to study the mechanical rainbow trapping effect, is composed by three parts. In the left a vibration isolations system A is constructed by machining a wedge which is covered by an absorbing mastic seal. The central part of the beam, in which the torsional waves are generated, is uniform of rectangular cross section, with length 200.0 cm, height 30.0 mm, and width 10.0 mm. The part at the right is a mechanical chirped structure; the lengths ℓ_n are given with the rule $\ell_n = \frac{\ell}{1+n\lambda}$ with $\ell = 10$ cm, and $\lambda = 0.00, 0.03$ and 0.06 . The cells of rectangular cross section and varying lengths are joined by rectangular cuboids of height 18.0 mm, width 6.0 mm and length 8.0 mm. The filled circles indicate the position of the laser measurements. The velocity of the torsional waves in the beam is $v=1750$ m/s.

in which the structure is machined (See Fig. 1); it is composed of cells with varying lengths ℓ_n separated with notches using the rule that yields the elastic Wannier-Stark ladders [26, 36–39]

$$\ell_n = \frac{\ell}{1+n\lambda}. \quad (1)$$

Here λ is the chirp parameter that mimics the electric field, and ℓ a fixed arbitrary length. When $\lambda = 0$ a periodic structure is obtained but for $\lambda \neq 0$ the structure becomes chirped and cells become smaller with the index j [36].

The band spectrum of the chirped structure was obtained numerically using the transfer matrix method [40]. The beam with free boundary ends is composed by a uniform part of fixed length and the chirped mechanical structure. The level dynamics as a function of the chirp parameter λ is shown in Fig. 2. One can observe a band structure superimposed with some levels that are constant with λ . These levels correspond to modes associated to the uniform part of the beam. For $\lambda = 0$ a typical band structure of locally periodic systems can be observed. Since a free surface is used at both ends of the beam a band starting at zero frequency results. Then gaps and bands appear sequentially with frequency. For zero chirp the first gap is approximately located between 6.5 kHz and 9.5 kHz. The latter defines the beginning of the second band, which ends at ≈ 13.5 kHz. For increasing values of λ the levels in each band start to separate, the bands become wider and the gaps narrower.

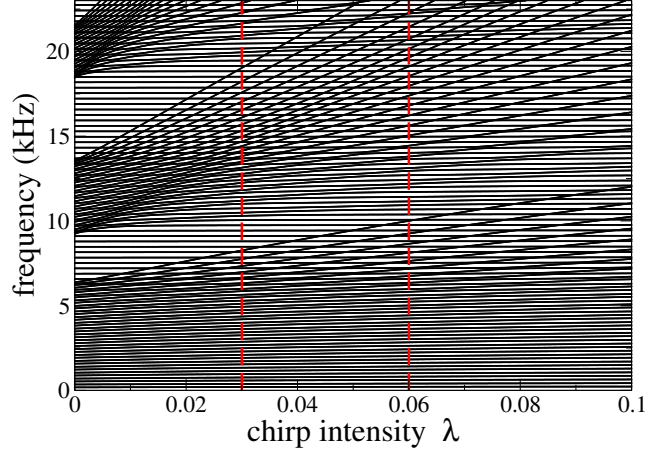


FIG. 2. (Color online) Band structure. The normal-mode frequencies for the beam formed by a uniform part and chirped mechanical structure calculated using the transfer matrix method. The frequency levels are given as function of the chirp parameter λ . The studied structures in the experiment correspond to $\lambda = 0.00, 0.03$ and 0.06 ; the two latter correspond to the (red) dashed vertical lines. The uniform part of the beam is 2.0 m long.

In the second band, as can be seen in the same figure, four different regimes are clearly defined. The first one corresponds to $0 < \lambda < 0.005$ in which the level density is inhomogeneous and is concentrated at the borders of the band; this is a reminiscence of the locally periodic system. In the second regime, for $0.005 < \lambda < 0.025$, a transition between a locally periodic system and the equally spaced spectrum is observed. A third region appears for $0.025 < \lambda < 0.060$ where the level density inside the band, for a fixed value of λ , is approximately homogeneous, *i.e.*, the levels are almost equally spaced. This is the Wannier-Stark ladders regime [36]. A fourth regime appears when the bands start to overlap one to each other. The results presented in this paper correspond to the three first regimes. The level dynamics was used to design the structured mechanical systems with $\lambda = 0, 0.03$, and 0.06 (vertical lines in Fig. 2). As will show below, in the second and third regimes the system is not periodic and shows two non-intuitive behaviors, the mechanical rainbow trapping and the elastic Bloch oscillations. The time evolution of the wave packets was also performed using the transfer matrix formalism. An initial wave packet, located at the free boundary of the uniform part of the beam, is expanded in around 250 normal-mode wave amplitudes and then its evolution is obtained in terms of the stationary solutions. The program was tested in several cases including the doorway state mechanism in the time domain [41].

In the experiment, torsional waves are generated in the uniform part of the beam and sent to the chirped structure with the setup depicted in Fig. 1. The signal

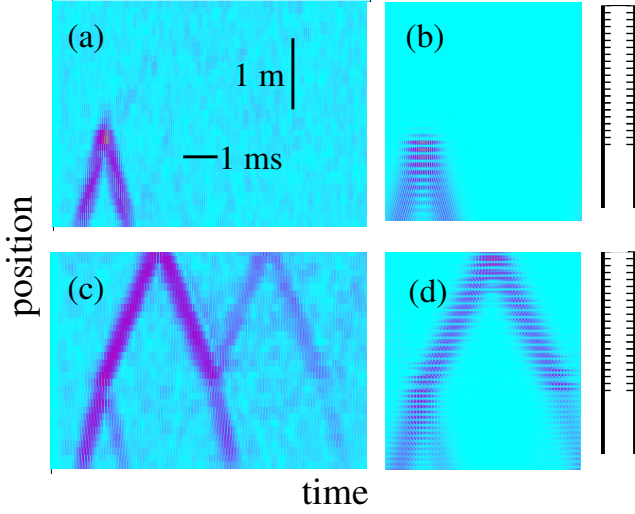


FIG. 3. Behavior of the wave packet intensity as a function of the position and time for the periodic structure, $\lambda = 0$. The left and right columns correspond to the experimental and numerical results, respectively. In cases (a) and (b) the central frequency lies in the gap ($f_C = 8$ kHz) whereas in cases (c) and (d) the central frequency lies in the second band ($f_C = 11.5$ kHz).

generated by the National Instruments PXI is amplified by a high-fidelity audio amplifier Cerwin-Vega CV5000 and then sent to an electromagnetic-acoustic transducer. The latter generates a torsional Gaussian wave packet at a certain position in the uniform part of the beam. The wave packet travels towards the chirped structure and the vibrations are measured with a laser Doppler vibrometer Metrolaser vibromet 500V. In order to reconstruct the dynamics of the wave packets, the measurements are done in several positions along the mechanical structure and in the uniform part of the beam. For frequencies higher than ≈ 1.5 kHz, the waves arriving to the other side of the beam are almost completely absorbed by a passive vibration isolation system. The latter consists of a wedge covered by an absorbing mastic seal [22, 42, 43].

Figure 3 shows the dynamics of a Gaussian wave packet measured in the mechanical structure. The wave packet has an initial width of 0.5 ms with a central frequency located at different frequencies inside the band and also in the gap. The width used in the time domain implies that the wave packet has a spatial width of 0.875 m in the uniform part of the beam. The initial wave packet, in all plots of Figs. 3, 4 and 5, is located at the left lower corner. Let's start with the behavior of the wave packet when its central frequency f_C lies within the gap. In this case the wave packet is completely reflected by the periodic structure for any value of the chirp parameter; see Fig. 3 (a). In the first regime, when $\lambda = 0$ and f_C lies in the band, part of the wave packet will cross the structure but other part will be reflected by it; see Fig. 3 (b). In

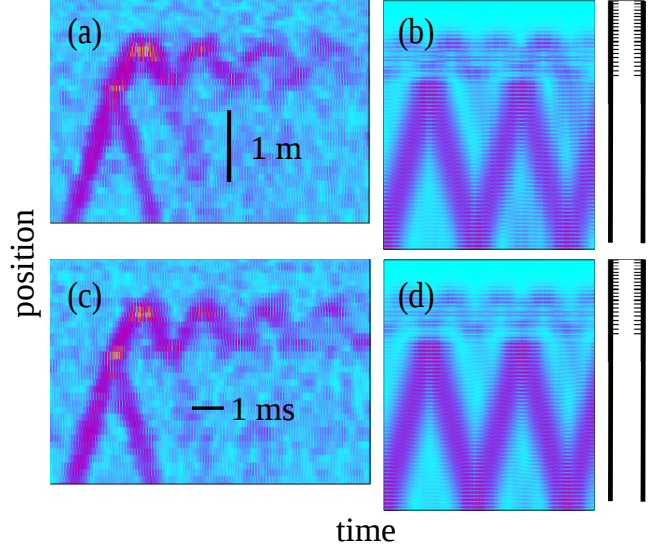


FIG. 4. The Bloch oscillations are apparent in a beam with a chirped structure ($\lambda = 0.06$). The left and right columns correspond to the experimental and transfer matrix results, respectively. In cases (a) and (b) the wave packet has a central frequency $f_C = 14.5$ kHz whereas in cases (c) and (d) the central frequency is $f_C = 15.0$ kHz. The oscillation period $T_{Bloch} \approx 1.6$ ms is independent of f_C within the same allowed band.

the third regime the Bloch oscillations are expected; the machined system corresponds to $\lambda = 0.06$. The results are shown in Fig. 4, where an oscillating behavior of the wave packet is observed within the mechanical structure. The images on the left (right) column correspond to the experiment (numerical simulation) with different central frequencies, within the second allowed band. The period of the oscillation is ≈ 1.6 ms, according with the theoretical prediction $T_{Bloch} = 1/\Delta f \approx 1.66$ ms for $\Delta f = 600$ Hz obtained from Fig. 2. This phenomenon is the elastic version of the Bloch oscillations. One can notice in the same figure that, in each oscillation, a portion of the energy of the wave packet escapes towards the uniform part of the beam. This indicates that the wave packet has a preferred direction of propagation given by the mechanical equivalent of the electric field. The Bloch oscillation is best seen in the experimental graphs (left panel of Fig. 4) due to passive vibration isolation system used to reduce the reflexions of the wave at the system's border. In the numerical simulation several reflections wave in the uniform part of the rod are observed. These reflections overlap inside the structure and reducing the intensity of the numerical Bloch oscillation (right).

The case of a mechanical chirped superlattice with $\lambda = 0.03$ with f_C inside the band is by far the more interesting and the most important result shown here; as f_C increases the wave packet is reflected at different depths inside the mechanical structure (See left column of

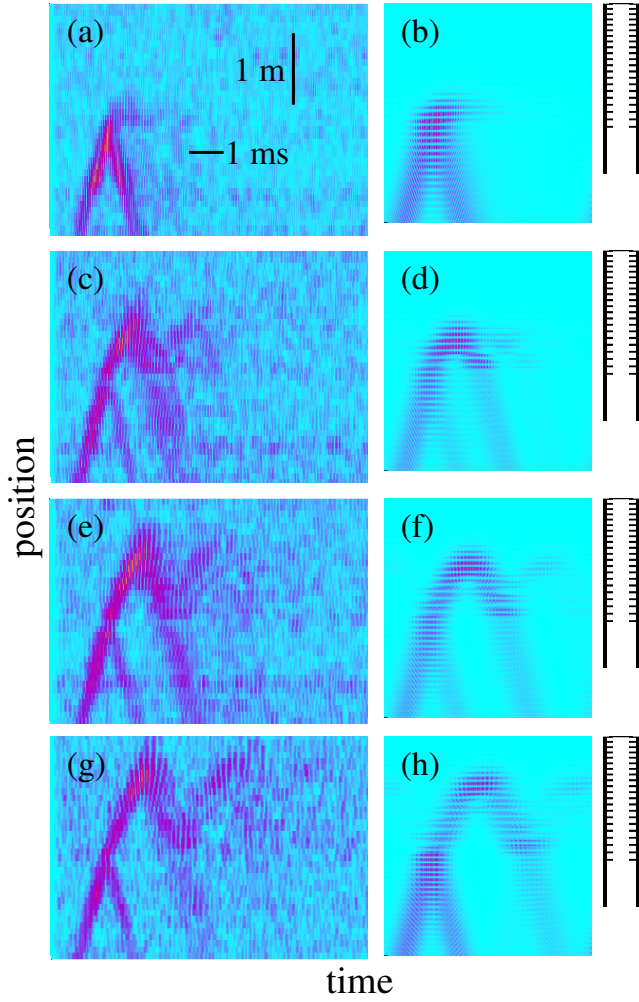


FIG. 5. The rainbow trapping is apparent in a chirped mechanical structure with $\lambda = 0.03$. The left and right columns correspond to the experimental and numerical results, respectively. The central frequency of the wave packet is 9 kHz for cases (a) and (b), 10 kHz for cases (c) and (d), 11 kHz for cases (e) and (f), and 12 kHz for cases (g) and (h).

Figs. 5). This is the mechanical rainbow trapping effect. The numerical evolution of the wave packet is shown in the right column of Fig. 5 confirms the experimental result. The reason of the appearance of the rainbow trapping is due to the fact that when $\gamma \ll 1$ one gets the rainbow trapping rule $\gamma = (a_n - a_{n-1})/a_n$, with a_n the inverse length. This rule was used to build the rainbow trapping effect [3].

To conclude, we have measured both, the mechanical Bloch oscillations and the elastic rainbow trapping effect for the first time. Both effects were found in chirped mechanical superlattices and were corroborated with numerical simulations. When the chirp parameter vanishes a locally periodic system with bands and gaps results. For larger values of the chirp parameter the mean level

spacing becomes constant and the Bloch oscillations appear. An intermediate regime, in the transition between a locally periodic beam and the Wannier-Stark ladders regime, the rainbow trapping effect emerges.

Acknowledgements This work was supported by DGAPA-UNAM under project PAPIIT IN103115 and by CONACYT. AAL gratefully acknowledges CONACYT for the support granted to pursue his Ph. D. studies. G. Báez received CONACYT's financial support. RAMS received support from DGAPA-UNAM under program PASPA. We acknowledge the kind hospitality of Centro Internacional de Ciencias A. C. and Instituto de Física, Universidad Autónoma de Puebla for group meetings celebrated frequently there. We would like to thank M. Martínez, A. Martínez, V. Domínguez-Rocha, E. Flores and E. Sadurní for invaluable comments. F.C, A.C. and J.S-D. acknowledge the support of the Spanish MINECO under the contract with Ref. TEC2014-53088-C3-1-R.

-
- [1] Chen, Y. Y. et al. Nat. Comm. **5**, 5247 (2014).
 - [2] Zhu, J. et al. Sci. Rep. **3**, 1728 (2013).
 - [3] Romero-García, V., R. Pic, A. Cebrecos, V. J. Sánchez-Morcillo, and K. Staliunas. Appl. Phys. Lett. **102**, 091906 (2013).
 - [4] Ni, X. et al. Sci. Rep. **4**, 7038 (2014).
 - [5] Lee, H., Hwan, J., Seung, H.M., Cho, S. H. Kim, Y. Y. Scientific Reports **6**, 24026 (2016).
 - [6] De-Gang Zhao, Li, Y. & Zhu, X.-F. Sci. Rep. **5**, 9376 (2015).
 - [7] Tsakmakidis, K. L., Boardman, A. D., and Hess, O. Nature. **450**, 397-401 (2007).
 - [8] Gan, Q., Ding, Y. J., and Bartoli, F. J. Phys. Rev. Lett. **102**, 056801 (2009).
 - [9] Park, J. et al. Opt. Express. **18**, 598-623 (2010).
 - [10] Zhao, X. P. et al. Appl. Phys. Lett. **95**, 071111 (2009).
 - [11] Smolyaninova, V. N. et al. Appl. Phys. Lett. **96**, 211121 (2010).
 - [12] Hu, Q. et al. Appl. Phys. Lett. **96**, 036206 161101 (2010).
 - [13] Shen, Y., Fu, J., and Yu G. Phys. Lett. A **375**, 3801-3803 (2011).
 - [14] Shen, Y. et al. J. Opt. Soc. Am. B **28**, 2444-2447 (2011).
 - [15] Gan, Q. et al. Proc. Nat. Acad. Sci. **108**, 5169-5173 (2011).
 - [16] Khurgin, J. B. Slow Adv. in Opt. and Photonics **2**, 287-318 (2010).
 - [17] Sun, S. L. et al. Nature Materials **11**, 426-431 (2012).
 - [18] Jang, M. S., and Atwater, H. Phys. Rev. Lett. **107**, 207401 (2011).
 - [19] Chen, L. et al. App. Phys. Lett. **97**, 153115 (2010).
 - [20] Bouillard, J.-S. et al. Sci. Rep. **2**, 829 (2012).
 - [21] Cui, Y. X. et al. Slab. Nano Lett. **12**, 1443-1447 (2012).
 - [22] Flores-Olmedo, E. et al, Sci. Rep. **6**, 25157 (2016)
 - [23] Méndez, et al, Phys. Rev. Lett. **60**, 2426 (1988).
 - [24] Waschke et al, Phys. Rev. Lett. **70**, 3319 (1993)
 - [25] Kuzmin and Haviland, Phys. Rev. Lett. **67**, 2890 (1991).
 - [26] Sapienza et al, Phys. Rev. Lett. **91**, 263902 (2003).
 - [27] Agarwal et al Phys. Rev. Lett. **92**, 097401 (2004).
 - [28] Lazcano et al, J. App. Phys. **115**, 154505 (2014).

Universal transmission fluctuations in a Sinai billiard with mirror symmetry

A. Arreola-Lucas¹, A. L. Salas-Brito², G. Báez-Juárez², R. A. Méndez-Sánchez³,
M. Martínez-Mares⁴

March 14, 2017

¹ Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, 02200 CDMX, México.

² Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, 02200 CDMX, México.

³ Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 48-3, 62210 Cuernavaca Mor., Mexico

⁴ Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Abstract

We study the transport of mechanical bending waves through a plate with a chaotic shape and mirror symmetry. The experimental transmittance was measured using acoustic resonant spectroscopy. In contradistinction with the known results of microwave cavities, the distribution of the mechanical transmittance shows a very good agreement with the predictions of random matrix theory.

1 Introduction

In spite of their different physical origin, the transport of different kind of waves could give similar results one to each other. This fact is clearly manifested in the wide use of the same analysis techniques and theoretical descriptions based on the random matrix theory (RTM) in different fields of physics ranging from microscopic to macroscopic [1, 2, 3]. The statistical fluctuations of the transmission spectrum in complex systems, as established by Ericson and Mayer-Kuckuk around 50 years ago [4], are an example of this universality. In fields as nuclear physics [5], mesoscopic physics [6], microwaves [7] and more recently in acoustics [8] universal transmission fluctuations, that depend only on the symmetry class of their evolution equations [9], emerge.

The effect of other symmetries, as the left-right or mirror symmetry, in the fluctuation properties is also of interest [10, 11, 12]. Up to now there has been only one experimental attempt to obtain results in chaotic billiards with left-right symmetry [13] with not very encouraging results. In this paper we study the fluctuation properties of the mechanical conductance in a chaotic elastic billiard with left-right symmetry. This is done for out-of-plane waves in a Sinai billiard, with reflection symmetry, constructed on a thin plate.

The technique of acoustic resonant spectroscopy is used to measure the fluctuations in the spectrum of the elastic cavity and then compared with the RMT predictions. In what follows we review the theoretical predictions. Then the experimental technique is explained and the results for a half Sinai billiard are given. A brief conclusion follows.

The classical thin-plate theory describes the behavior of the flexural waves. In the waveguides, at zero frequency, the torsional and the constant channel open. Thus, for frequencies below $f_2 = (9\pi^2/8W)(D/\rho h)^{1/2}$, *i.e.* frequencies that will be used in the laboratory, only two channels are open for flexural waves. Here W is the width of the waveguide, ρ the density, h the plate thickness and $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ is the flexural rigidity, being E the Young's modulus and ν the Poisson's ratio. The wave transport properties through the cavity, in the Landauer-Büttiker's formalism, can be written in terms of the scattering matrix S that gives the outgoing waves in terms of the incoming ones. Since the elastic system is time-reversal with mirror symmetry the S -matrix takes the form

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where r and t are the 2×2 reflection and transmission matrices. The conductance, according to Landauer-Büttiker's formula, is proportional to $T = \text{tra}[tt^\dagger]$. In the literature there are some techniques to obtain theoretically the properties of the conductance. The maximum-entropy and the supersymmetric methods as well as the Heidelberg approach are commonly used Ref. [3, 13, 14]. The distribution of the transmittance for a chaotic cavity with mirror symmetry has been found to be [11]

$$w(T) = \frac{1}{\pi\sqrt{T(1-T)}}; \quad 0 \leq T \leq 1, \quad (2)$$

for one open channel while for two open channels the result is,

$$w(T) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{T(2-T)}}{|1-T|}; \quad 0 \leq T \leq 2. \quad (3)$$

One can notice that both expressions are symmetrical with respect to the average $\langle T \rangle$ of T ($= 1/2$ for one open channel, and $= 1$ for two open channels). Also, in the one channel case, one can observe a divergence at $T = 0$. This is related to the weak localization present in systems with time reversal symmetry. This peak that also appears in $T = 1$ due to the mirror symmetry.

2 Experimental results

In Fig. 1 a diagram of the experimental setup is given. The sinusoidal signal generated by a vector network analyzer, Anritsu MB4630B, is amplified and then converted to a mechanical vibration by an electromagnetic-acoustic transducer (EMAT) located at one waveguide. The flexural vibration, that passes through the cavity, is measured with another EMAT at the other waveguide. More details of the experimental setup can be found in Ref. [1]. As it can be seen in Fig. 2, a half Sinai billiard, *i.e.*, with mirror

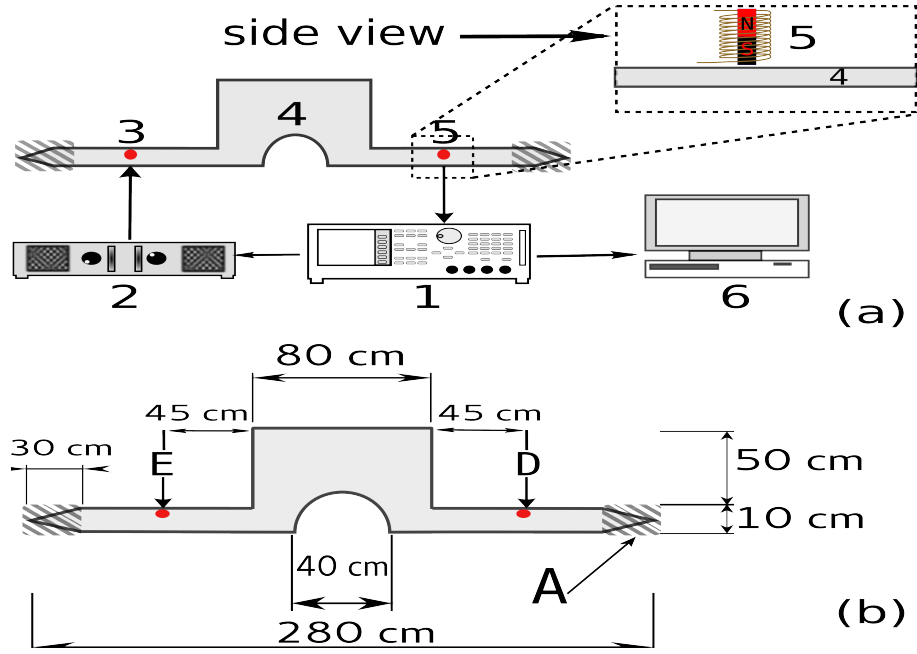


Figure 1: In the upper part (a), we show the block diagram of the experimental setup. The vector network analyzer (1) sends a sinusoidal signal to the power amplifier (2). The amplified signal is sent to the electromagnetic-acoustic transducer (EMAT) exciter (3) which produces a mechanical vibration in the aluminum plate (4). The vibrations of the plate are measured by the EMAT detector (5). The measured signal by the EMAT is sent back to the VNA. The experimental data are collected in the computer (6) via usb-GPIB. In the lower part (b) the half Sinai billiard with radius 20 cm, height 60 cm and length 80 cm, is depicted. The plate has a thickness of 6.35 mm. The excitation and detection points are marked by **E** and **D**, respectively. In the shaded region **A** a vibration isolation system was used. In the inset the configuration of the EMAT, consisting of a coil and a permanent magnet, is given.

simmetry was used. To avoid direct reflections at the entrance, the billiard with the two waveguides was machined from a single aluminium plate. Also, to avoid unwanted reflections at the end of the wideguides, passive vibration isolation systems are used.

Las dimensiones del sistema se pueden ver en la parte inferior de la Figura 1, en donde además se muestran dos puntos marcados con las letras a) para indicar el sitio de excitación y b) para la detección. Se conoce en la literatura que desde la frecuencia cero [paper kike] es posible excitar un modo flexional y un torcional lo que produce que ambos canales contribuyan a las fluctuaciones. Se colocan ambos EMATs en el centro de la guía de onda a lo ancho y a 45 cm de distancia con respecto a la cavidad debido a que uno de estos modos de transmisión presenta un nodo en el centro, de esta forma se espera la contribución de un solo canal pues se tendría la contribución de un canal de transmisión. Debido a que la cavidad es simétrica se tiene (poner explicación del dr Moises) por ello no es posible experimentalmente obtener las fluctuaciones de la transmisión de un solo canal, sin embargo es posible mostrar las fluctuaciones de transmisión para dos canales.

In Fig. 3 the transmission measured for the Sinai billiard and the Bunimovich stadium

is given. The distribution obtained are given in Fig. 4.

3 conclusions

References

- [1] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong, *Rev. Mod. Phys.* 53, 385 (1981).
- [2] M. L. Mehta. *Random matrices and the statistical theory of energy levels*. Academic Press, New York, 1967.
- [3] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller *Phys. Rep.* 299, 189 (1998).
- [4] T. Ericson, T. Mayer-Kuckuk. *Fluctuations in Nuclear Reactions*. *Annual Review of Nuclear Science*. Volume 16, pp 183-206, (1966).
- [5] G. E. Mitchell, A. Richter, and H. A. Weidenmüller. *Random matrices and chaos in nuclear physics: Nuclear reactions*. *Rev. Mod. Phys.* 82, 2845, (2010).
- [6] Leo Kouwenhoven and Charles Marcus. *Quantum dots*. *Physics World*, Volume 11, Number 6.
- [7] H.-J Stöckmann y J. Stein. *Quantum chaos in billiards studied by microwave absorption*, *Phys. Rev. Lett.* 64, 2215 (1990).
- [8] Flores-Olmedo, E. et al. *Experimental evidence of coherent transport*. *Sci. Rep.* 6, 25157, (2016).
- [9] P. A. Mello y N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations* (Oxford University Press, New York, 2004).
- [10] M. Martínez and P. A. Mello, *Phys. Rev. E* 63, 016205 (2000).
- [11] V. A. Gopar, M. Martínez, P. A. Mello, and H. U. Baranger. *The invariant measure for scattering matrices with block symmetries*. *J. Phys. A* 29, 881 (1996).
- [12] Victor A. Gopar, Stefan Rotter, and Henning Schomerus. *Transport in chaotic quantum dots: Effects of spatial symmetries which interchange the leads*. *Phys. Rev. B.* 73, 165308 (2006).
- [13] H. Schanze, et al. *Universal transport properties of open microwave cavities with and without time-reversal symmetry*, *Phys. Rev. E.* 71, 016223 (2005).
- [14] Konstantine Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge University Press, 1997.
- [15] Karl F. Graff. *Wave motion in elastic solids*, Oxford University Press, 1975

Bibliografía

- [1] J. A. Franco-Villafañe, E. Flores Olmedo, G Báez, R. A. Méndez-Sánchez, O Gandarilla-Carrillo. *Acoustic Resonance Spectroscopy for the Advanced Undergraduate Laboratory*, Eur. J. Phys. **33** (2012) 1761-1769.
- [2] G. Báez, M. Cobian-Suárez, A. M. Martínez-Argüello, M. Martínez-Marez and R. A. Méndez-Sánchez. *Scattering of Elastic Waves in a Quasi-One-Dimensional Cavity: Theory and Experiment*, Acta Physica Polonica A. Vol. **124** (2013) 1069-1073.
- [3] E. Flores-Olmedo, A.M. Martínez-Argüello, M. Martínez-Marez, G. Báez, J. A. Franco-Villafañe and R. A. Méndez-Sánchez. *Experimental evidence of coherent transport*, Scientific Reports. **6**, 25157, (2016).
- [4] K. Hyde, J. Y. Chang, C. Bacca, J. A. Wickert, *Parameter studies for plane stress in-plane vibration of rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration, **247** (2001) 471–487.
- [5] D. J. Gorman, *Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition*, Journal of Sound and Vibration, **272** (2004) 831–851.
- [6] J. Du, W. L. Li, G. Jin, T. Yang, Z. Liu, *An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges*, Journal of Sound and Vibration, **306** (2007) 908–927
- [7] D. J. Gorman, *Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration, **276** (2004) 311–333.
- [8] K. F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover, New York 1991.
- [9] N. S. Bardell, R. S. Langley, J. M. Dunsdon, *On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration, **191** (1996) 459–467.
- [10] B. Liu, Y. Xing, *Exact solutions for free in-plane vibrations of rectangular plates*, Acta Mechanica Solida Sinica, **24** (2011) 556–567.
- [11] L. Dozio, *Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with arbitrary elastic boundaries*, Mechanics Research Communications, **37** (2010) 627–635.

- [12] D. J. Gorman, *Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries*, Journal of Sound and Vibration, **285** (2005) 941–966.
- [13] D. J. Gorman, *Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported*, Journal of Sound and Vibration, **294** (2006) 131–161.
- [14] C. H. Huang, C. C. Ma, *Experimental and numerical investigations of resonant vibration characteristics for piezoceramic plates*, Journal of the Acoustical Society of America, **109** (2001) 2780–2788.
- [15] D. Larsson, *In-plane Modal Testing of a Free Isotropic Rectangular Plate*, Experimental Mechanics, **37** (1997) 339–343.
- [16] K. Schaadt, G. Simon, C. Ellegaard, *Ultrasound resonances in a rectangular plate described by random matrices*, Physica Scripta, **T90** (2001) 231–237.
- [17] F. J. Nieves, F. Gascon, A. Bayon, *Natural frequencies and mode shapes of flexural vibration of plates: laser-interferometry detection and solutions by Ritz’s method*, Journal of Sound and Vibration, **278** (2004) 637–655.
- [18] C. C. Ma, H.Y. Lin, *Experimental measurements on transverse vibration characteristics of piezoceramic rectangular plates by optical methods*, Journal of Sound and Vibration, **286** (2005) 587–600.
- [19] B. Manzanares-Martínez, J. Flores, L. Gutiérrez, R.A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, A. Morales, F. Ramos-Mendieta, *Flexural vibrations of a rectangular plate for the lower normal modes*, Journal of Sound and Vibration, **329** (2010) 5105–5115.
- [20] Y. F. Xu, W. D. Zhu, *Operational modal analysis of a rectangular plate using non-contact excitation and measurement*, Journal of Sound and Vibration, **332** (2013) 4927–4939.
- [21] J. P. Monchalin, J. D. Aussel, R. Heon, C. K. Jen, A. Boundreault, R. Bernier, *Measurement of in-plane and out-of-plane ultrasonic displacements by optical heterodyne interferometry*, Journal of Nondestructive Evaluation, **8** (1989) 121–132.
- [22] A. Arreola-Lucas, *Estándar experimental de vibraciones fuera del plano en placas rectangulares*. Tesis de Maestría en ciencias e ingeniería de materiales, UAM-Azcapotzalco (2013).
- [23] M. Kadic, T. Buckmann, R. Schittny, and M. Wegener, Rep. Prog. Phys. **76**, 126501 (2013).
- [24] S. A. Cummer, J. Christensen, and A. Alú, Nat. Rev. Mat. **1**, 16001 (2016).

- [25] K. L. Tsakmakidis, A. D. Boardman, and O. Hess, *Nature*, **450**, 397-401 (2007).
- [26] Q. Gan, Y. J. Ding, and F.J. Bartoli, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 056801 (2009).
- [27] J. Park *et al.*, *Opt. Express.* **18**, 598-623 (2010).
- [28] X. P. Zhao *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **95**, 071111 (2009).
- [29] V. N. Smolyaninova *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **96**, 211121 (2010).
- [30] Q. Hu *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **96**, 036206 161101 (2010).
- [31] Y. Shen, Fu, J., and Yu G., *Phys. Lett. A* **375**, 3801–3803 (2011).
- [32] Y. Shen, Y. *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B* **28**, 2444-2447 (2011).
- [33] Q. Gan, *et al.*, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **108**, 5169–5173 (2011).
- [34] J. Khurgin, B. Slow, *Adv. in Opt. and Photonics* **2**, 287–318 (2010).
- [35] S. L. Sun, *et al.*, *Nature Materials* **11**, 426–431 (2012).
- [36] M. S. Jang and H. Atwater, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 207401 (2011).
- [37] L. Chen *et al.*, *App. Phys. Lett.* **97**, 153115 (2010).
- [38] J.-S. Bouillard *et al.*, *Sci. Rep. 2*, **829** (2012).
- [39] Y. X. Cui *et al.*, *Slab. Nano Lett.* **12**, 1443–1447 (2012).
- [40] De-Gang Zhao, Y. Li, and & X.-F. Zhu, *Sci. Rep.* **5**, 9376 (2015).
- [41] J. Zhu *et al.*, *Sci. Rep.* **3**, 1728 (2013).
- [42] X. Ni *et al.*, *Sci. Rep.* **4**, 7038 (2014).
- [43] V. Romero-García, R. Picó, A. Cebrecos, V. J. Sánchez-Morcillo, and K. Staliunas, *Appl. Phys. Lett.*, **102**, 091906 (2013).
- [44] Huibers, A. G. *et al.*, *Distributions of the Conductance and its Parametric Derivatives in Quantum Dots*, *Phys. Rev. Lett.*, **81** 1917-1920 (1998).
- [45] Keller, M. W. *et al.*, *Energy-averaged weak localization in chaotic microcavities*, *Phys. Rev. B.*, **53** R1693-R1696 (1996).
- [46] Huibers, A. G., Switkes, M., Marcus, C. M., Campman, K., and Gossard, A. C., *Dephasing in Open Quantum Dots*, *Phys. Rev. Lett.*, **81** 200-203 (1998).
- [47] Büttiker, M., *Symmetry of electrical conduction*, *IBM J. Res. Develop.*, **32** 317-334 (1988).

- [48] Baranger, H. U., and Mello, P. A., *Mesoscopic Transport through Chaotic Cavities: A Random S-Matrix Theory Approach*, Phys. Rev. Lett., **73** 142-145 (1994).
- [49] Schanze, H., Alves, E. R. P., Lewenkopf, C. H., and Stöckmann, H.-J., *Transmission fluctuations in chaotic microwave billiards with and without time-reversal symmetry*, Phys. Rev. E, **64**, 065201(R) (2001).
- [50] Kim, Y.-H., Barth, M., Stöckmann, H.-J., and Bird, J. P., *Wave function scarring in open quantum dots: A microwave-billiard analog study*, Phys. Rev. B, **65** 165317 (2002).
- [51] Méndez-Sánchez, R. A., Kuhl, U., Barth, M., Lewenkopf, C. H., and Stöckmann, H.-J., *Distribution of Reflection Coefficients in Absorbing Chaotic Microwave Cavities*, Phys. Rev. Lett., **91** 174102 (2003).
- [52] Schanze, H., Stöckmann, H.-J., Martínez-Mares, M., and Lewenkopf, C. H. *Universal transport properties of open microwave cavities with and without time-reversal symmetry*, Phys. Rev. E, **71** 016223 (2005).
- [53] Lawniczak, M., Bauch, S., Hul, O., and Sirko, L., *Experimental investigation of microwave networks simulating quantum chaotic systems: the role of direct processes*, Phys. Scr. **T147** 014018 (2012).
- [54] Hemmady, S. *et al.*, *Universal properties of two-port scattering, impedance, and admittance matrices of wave-chaotic systems*, Phys. Rev. E. **74** 036213 (2006).
- [55] N. W. Ascroft and N. D. Mermin, Solid State Physics (Hold, Reinhart & Winston, 1976), p. 224.
- [56] E.E. Méndez, F. Agulló-Rueda, and J.M. Hong, Phys. Rev. Lett. **60**, 2426 (1988); L.S. Kuzmin and D.B. Haviland, Phys. Rev. Lett. **67**, 2890 (1991); C. Waschke, H.G. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz and K. Kohler, Phys. Rev. Lett. **70**, 3319 (1993).
- [57] Sanchis-Alepuz et al, Phys. Rev. Lett. **98**, 134301 (2007); N. D. Lanzillotti-Kimura *et al.* Phys. Rev. Lett. **104**, 197402 (2010).
- [58] Z. He, S. Peng, F. Cai, M. Ke and Z. Liu, Phys. Rev. E **76**, 056605 (2007).
- [59] M. M. deLima, Y. A. Kosevich, P.V. Santos and A. Cantarero, Phys. Rev. Lett. **104**, 165502 (2010).
- [60] J. S. Lehtinen, K. Zakharov and K.Y. Arutyunov, Phys. Rev. Lett. **109**, 187001, (2012)
- [61] J. Floss, A. Kamalov, I.S. Averbukh and P.H. Bucksbaum, Phys. Rev. Lett. **115**, 203002 (2015).

- [62] Enrique Flores-Olmedo. *Medición del transporte ondulatorio en cavidades caóticas elásticas*, Tesis de Doctorado en ciencias e ingeniería de materiales, UAM-Azcapotzalco (2016).
- [63] A. Arreola-Lucas, J. A. Franco-Villafañe, G. Báez and R. A. Méndez-Sánchez. *In-plane vibrations of a rectangular plate: plane wave expansion modelling and experiment*, Journal of Sound and Vibration, Volumen *342* (2015) 168-176.
- [64] A. Morales, L. Gutierrez, J. Flores. *Improved Eddy Current Driver-Detector for Elastic Vibrations*, American Journal of Physics, **69** (2001) 517-522.
- [65] A. Morales, J. Flores, L. Gutiérrez, and R. A. Méndez-Sánchez. *Compresional and Torsional Wave Amplitudes in Rods with Periodic Structures*, Journal of the Acoustical Society of America, **112** (2002) 1961-1967.
- [66] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Teoría de la elasticidad*, Reverté, Volumen 7, 1969.
- [67] L. Gutiérrez, A. Díaz-de Anda, J. Flores, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and A. Morales. *Wannier-stark ladders in one-dimensional elastic systems*, Physical Review Letters, **97** 11 (2006).
- [68] Yi-Yuan Yu, *Vibrations of Elastic Plates*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [69] J. A. Franco-Villafañe. *Nuevos modelos ondulatorios para sistemas elásticos en una y dos dimensiones y su comparación con el experimento.*, Tesis de Doctorado, Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM 2014.
- [70] P. Griffin, P. Nagel and R. D. Koshel, *The plane-wave expansion method*, Journal of Mathematical Physics, **15** (1974) 1913-1917.
- [71] Y. Cao, Z. Hou, Y. Liu, *Convergence problem of plane-wave expansion method for phononic crystals*, Physics Letters A, **327** (2004) 247-253.
- [72] Z. Hou, B.M. Assouar, *Modeling of Lamb wave propagation in plate with two-dimensional phononic crystal layer coated on uniform substrate using plane-wave-expansion method*, Physics Letters A, **372** (2008) 2091-2097.
- [73] A. A. Kutsenko, A. L. Shuvalov, A. N. Norris, *Converging bounds for the effective shear speed in 2D phononic crystals*, Journal of Elasticity, **13** (2013) 179-191
- [74] B. Manzanares-Martínez, F. Ramos-Mendieta, A. Baltazar, *Ultrasonic elastic modes in solid bars: An application of the plane wave expansion method*, Journal of the Acoustical Society of America, **127** (2010) 3503-3510.
- [75] A. Díaz-de-Anda, J. Flores, L. Gutiérrez, R.A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais and A. Morales, *Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions*, Journal of Sound and Vibration, **331** (2012) 5732-5744.

- [76] M. Ghulinyan, *et al*, Phys. Rev. Lett. **94**, 127401 (2005).
- [77] Brody, T. A., Flores, J., French, J. R., Mello, P. A., Pandey, A. and Wing, S. S. M., (1981). Rev. Modern Phys., **53**, 385.
- [78] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. 299, 189, 1998.
- [79] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd ed. Academic, New York, 1991.
- [80] Víctor A Gopar, Moisés Martínez, Pier A. Mello and Harold U. Barang. *The invariant measure for scattering matrices with block symmetries*, J. Phys. A: Math. Gen., **29** (1996) 881–888.
- [81] Moisés Martínez Máres. *Transporte electrónico a través de cavidades caóticas balísticas: simetría de reflexión y su ruptura. Analogía con un árbol de Cayley.*, Tesis de Doctorado, Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM 2001.
- [82] Pier A. Mello and Narendra Kumar. *Quantum Transport in Mesoscopic System: Complexity and Statistical Fluctuations*, Ed. Oxford University Press, First published 2004.
- [83] P. Pichauereau y R. A. Jalabert. *Unbounded fluctuations in transport through an integrable cavity*, Eur. Phys. J. B 9, **299** (1999).
- [84] A. Arreola, G. Báez, and R. A. Méndez-Sánchez. *Quasi-one-dimensional modes in strip plates: Theory and experiment*, AIP Conf. Proc., **1579** 63–66, (2014).

